

2. Grundlagen der FEM für die Elastomechanik

Im folgenden Abschnitt wollen wir wichtige Grundgleichungen der FEM zur Entwicklung von finiten Elementen für Probleme der Elastomechanik bereitstellen. Dabei beschränken wir uns hier auf linear-elastische Probleme der Statik und Dynamik, leiten aber die Grundgleichungen der FEM für den allgemeinen 3D-Fall ab. Dabei erfolgt die Herleitung der Elementsteifigkeitsmatrix, der Elementmassenmatrix und des Elementkraftvektors für ein beliebiges finites Element, dessen Verformungszustand durch zunächst nicht näher spezifizierte Ansatzfunktionen approximiert wird. Auf die Assemblierung des Elementgleichungssystems zum Gesamtgleichungssystem einer Vernetzung, die Einarbeitung von Randbedingungen und die Lösung des Gleichungssystems wird nur kurz eingegangen.¹

Von den Grundgleichungen ausgehend werden dann im Abschnitt 3 für einfache finite Elemente - die sogenannte *Simplexelemente*² - die Ableitung der Elementmatrizen und der Elementkraftvektoren exemplarisch dargestellt.

2.1. Differentialgleichungen der linearen Elastostatik

In diesem Abschnitt werden einleitend die wichtigsten Gleichungen der linearen Elastostatik in Matrixschreibweise angegeben.³ Probleme der Elastomechanik lassen sich durch die folgenden drei Sätze von Gleichungen beschreiben:

- ◆ Zusammenhang zwischen Verzerrungen und Verschiebungen
- ◆ Gleichgewichtsbedingungen
- ◆ Konstitutive Gleichungen (Materialgesetz)

Dazu kommen noch Gleichungen für die Randbedingungen in den Verschiebungen und in den Spannungen.

Zusammenhang zwischen Verzerrungen und Verschiebungen⁴

Der Zusammenhang zwischen Verzerrungen (Dehnungen) und Verschiebungen lautet in Matrixschreibweise

$$\mathbf{e} = \mathbf{D}\mathbf{u} \quad \text{in } V \quad (2.1-1)$$

Dabei ist \mathbf{e} der Vektor der Verzerrungen, \mathbf{D} ist eine Differentiationsmatrix, die partielle Ableitungen nach den globalen Koordinaten enthält, und \mathbf{u} ist der Verschiebungsvektor. Für ein-, zwei- und dreidimensionale Probleme wird die Gleichung (2.1-1) nachfolgend spezifiziert.

Eindimensionaler Fall (1D)

$$\mathbf{e} = [\varepsilon_x] = \mathbf{D}\mathbf{u} = \left[\frac{\partial}{\partial x} \right] [\mathbf{u}] \quad (2.1-2)$$

¹ Siehe dazu auch die Vorlesung *Mathematische und Numerische Methoden der Mechanik – Teil II – Computer-Numerik*.

² Finite Elemente mit den einfachsten möglichen Ansatzfunktionen.

³ Siehe dazu die auch die Vorlesungen *Kontinuumsmechanik/Elastizitätstheorie* und *Mathematische und Numerische Methoden der Mechanik - Teil I*.

⁴ Manchmal auch als *kinematische Verträglichkeitsbedingungen* bezeichnet.

Zweidimensionaler Fall (2D)⁵

$$\mathbf{e} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \mathbf{D}\mathbf{u} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \quad (2.1-3)$$

Dreidimensionaler Fall (3D)

$$\mathbf{e} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{bmatrix} = \mathbf{D}\mathbf{u} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} \quad (2.1-4)$$

Verschiebungsrandbedingungen⁶

Wenn auf einem Teil des Randes O_u Verschiebungen $\bar{\mathbf{u}}$ vorgeschrieben sind, muß gelten

$$\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} \quad \text{auf } O_u . \quad (2.1-5)$$

Gleichgewichtsbedingungen⁷

Die Gleichgewichtsbedingungen lauten

$$\mathbf{D}^T \mathbf{s} + \bar{\mathbf{p}} = 0 \quad \text{in } V, \quad (2.1-6)$$

wobei $\bar{\mathbf{p}}$ den Vektor der Volumenlasten bezeichnet und \mathbf{s} der Spannungsvektor ist, der im 1D-, 2D- und 3D-Fall folgende Komponenten hat.

Eindimensionaler Fall (1D)

$$\mathbf{s}^T = [\sigma_x]$$

⁵ Als 2D-Modell wird hier stets ein Scheibenmodell mit einem ebenen Spannungszustand vorausgesetzt. Auf andere, oft auch mit 2D bezeichnete Modelle (z.B. ebener Verformungszustand, rotationssymmetrische Probleme und Plattenprobleme) wird später noch eingegangen werden.

⁶ Manchmal auch als *kinematische Randbedingungen* bezeichnet.

⁷ Manchmal auch als *statische Verträglichkeitsbedingungen* bezeichnet.

Zweidimensionaler Fall (2D)

$$\mathbf{s}^? = \begin{bmatrix} s_x & s_y & \tau_{xy} \end{bmatrix}$$

Dreidimensionaler Fall (3D)

$$\mathbf{s}^T = \begin{bmatrix} \sigma_x & \sigma_y & \sigma_z & \tau_{xy} & \tau_{yz} & \tau_{zx} \end{bmatrix}$$

Spannungsrandbedingungen⁸

Wenn auf einem Teil der Oberfläche O_q Flächenlasten wirken, dann muß auf jedem differentiellen Teil dieser Oberfläche Gleichgewicht mit den Spannungen an dieser Stelle herrschen, d.h. es gilt

$$\mathbf{q} = \mathbf{T}_n^T \mathbf{s} = \bar{\mathbf{q}} \quad \text{auf } O_q. \quad (2.1-7)$$

Die Matrix \mathbf{T}_n transformiert den Spannungsvektor \mathbf{s} auf die Randspannungen \mathbf{q} (englisch: tractions). Sie enthält die Richtungskosinus der Randnormale. Für den 3D-Fall lautet diese Matrix beispielsweise

$$\mathbf{T}_n^T = \begin{bmatrix} c_{nx} & 0 & 0 & c_{ny} & 0 & c_{nz} \\ 0 & c_{ny} & 0 & c_{nx} & c_{nz} & 0 \\ 0 & 0 & c_{nz} & 0 & c_{ny} & c_{nx} \end{bmatrix}, \quad (2.1-8)$$

wobei die $c_{ni} = \cos(\mathbf{n}, x_i)$, mit $x_1=x$, $x_2=y$, $x_3=z$, die Randnormalen sind. Der Vektor $\bar{\mathbf{q}}$ enthält die vorgegebenen (bekannten) Flächenlastkomponenten bezogen auf das globale kartesische Bezugssystem.⁹

Konstitutive Gleichungen¹⁰

Wir wollen hier zunächst nur Materialien betrachten, die durch das klassische *Hooke*-sche Gesetz beschrieben werden können. Die in die Materialmatrix \mathbf{E} eingehenden Materialparameter müssen aus Experimenten bestimmt werden.

$$\mathbf{s} = \mathbf{E}\mathbf{e} \quad (2.1-9)$$

Dabei bezeichnet \mathbf{E} die *Hooke*-sche Matrix, die bekanntlich im isotropen Fall durch zwei unabhängige Stoffgrößen, den Elastizitätsmodul¹¹ E und die Querkontraktionszahl¹² ν beschrieben ist¹³.

Eindimensionaler Fall (1D)

$$\sigma_x = E\epsilon_x \quad (2.1-10)$$

⁸ Manchmal auch als *statische Randbedingungen* bezeichnet.

⁹ Im Rahmen dieser Vorlesung werden wir als globales Bezugssystem stets ein kartesisches Koordinatensystem verwenden.

¹⁰ Materialgesetz

¹¹ In der englischsprachigen Literatur meist als *Youngs*-cher Modul bezeichnet.

¹² Manchmal auch als *Poissons*-che Zahl bezeichnet.

¹³ Teilweise werden statt E und ν auch die *Lames*-chen Konstanten λ und μ verwendet:

$$\mu = G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad \text{und} \quad \lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}$$

Zweidimensionaler Fall (2D)

Für den 2D-Fall gilt allgemein:

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} & E_{13} \\ & E_{22} & E_{23} \\ \text{symm.} & & E_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} \quad (2.1-11)$$

Für den allgemeinen anisotropen Fall müssen also 6 Materialkonstanten bestimmt werden. Wenn das Material isotrop ist, gilt für die E_{ij}

$$E_{11} = E_{22} = \frac{E}{1-\nu^2}, \quad E_{12} = \frac{\nu E}{1-\nu^2}, \quad E_{33} = G, \quad E_{13} = E_{23} = 0 \quad (2.1-12)$$

Im isotropen Fall ist das Materialgesetz durch zwei Konstanten, z.B. E und ν eindeutig beschrieben, der Schubmodul G ist mit E und ν durch folgende Gleichung verknüpft:

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (2.1-13)$$

Ist das Material orthotrop, hat es bezogen auf zwei senkrecht zueinander stehende Richtungen, die durch die Indizes 1 und 2 gekennzeichnet sind¹⁴, unterschiedliche Eigenschaften. Man erhält für diesen Fall

$$\begin{aligned} E_{11} &= \frac{E_1}{1-\nu_{21}^2}, & E_{12} &= \frac{\nu_{21} E_1}{1-\nu_{21}^2}, & E_{22} &= \frac{E_1}{(1-\nu_{21}^2)n}, \\ E_{33} &= \frac{E_1}{m}, & E_{13} &= E_{23} = 0 \end{aligned} \quad (2.1-14)$$

mit

$$n = \frac{E_1}{E_2}, \quad m = \frac{E_1}{G_{12}} \quad (2.1-15)$$

Es ergeben sich also insgesamt 4 unabhängige Materialkonstanten E_1 , E_2 , ν_{21} und G_{12} . Aus Symmetriegründen muß außerdem die Beziehung

$$\frac{\nu_{21}}{E_2} = \frac{\nu_{12}}{E_1} \quad (2.1-16)$$

gelten, wodurch ν_{12} durch ν_{21} ausgedrückt werden kann.

Dreidimensionaler Fall (3D)

Im beliebig anisotropen Fall hat die symmetrische Elastizitätsmatrix E_{ij} das Format 6×6 , und man benötigt 21 Materialkonstanten. Im isotropen Fall reichen wieder die zwei Größen E und ν aus, und es ergibt sich

¹⁴ Es wird hier angenommen, daß das globale Koordinatensystem mit den lokalen Materialrichtungen übereinstimmt. Anderenfalls ist eine Transformation der *Hookeschen* Matrix erforderlich. Wenn sich die Spannungen über $\bar{\mathbf{s}} = \mathbf{T}\mathbf{s}$ auf eine neues Koordinatensystem $\bar{\mathbf{x}}$ transformieren, wobei \mathbf{T} eine Orthogonalmatrix ist mit $\mathbf{T}^{-1} = \mathbf{T}^T$, ergibt sich für die Transformation der *Hookeschen* Matrix $\bar{\mathbf{E}} = \mathbf{T}^T \mathbf{E} \mathbf{T}$.

$$\mathbf{E} = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1 & \frac{\nu}{\nu-1} & \frac{\nu}{\nu-1} & 0 & 0 & 0 \\ & 1 & \frac{\nu}{\nu-1} & 0 & 0 & 0 \\ & & 1 & 0 & 0 & 0 \\ & & & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} & 0 & 0 \\ & & & & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} & 0 \\ & & & & & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \\ \text{symm.} & & & & & \end{bmatrix} \quad (2.1-17)$$

Wenn das Materialgesetz orthotrop bezüglich dreier senkrecht aufeinander stehender Koordinatenrichtungen x_1 , x_2 und x_3 ist, kann die *Hookesche Matrix*¹⁵ in folgender Form geschrieben werden:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \end{bmatrix} = \frac{1}{D} \begin{bmatrix} E_1(1-\nu_{23}\nu_{32}) & E_1(\nu_{12}+\nu_{13}\nu_{32}) & E_1(\nu_{13}+\nu_{12}\nu_{23}) & 0 & 0 & 0 \\ & E_2(1-\nu_{13}\nu_{31}) & E_2(\nu_{23}+\nu_{21}\nu_{13}) & 0 & 0 & 0 \\ & & E_3(1-\nu_{12}\nu_{21}) & 0 & 0 & 0 \\ & & & DG_{12} & 0 & 0 \\ & & & & DG_{23} & 0 \\ & & & & & DG_{31} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{33} \\ \gamma_{12} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \end{bmatrix} \quad (2.1-18)$$

wobei hier D die folgende Abkürzung ist:

$$D = 1 - \nu_{12}\nu_{21} - \nu_{23}\nu_{32} - \nu_{13}\nu_{31} - 2\nu_{12}\nu_{23}\nu_{31} \quad (2.1-19)$$

Auch hier gelten wieder die Symmetriebedingungen

$$\frac{\nu_{ij}}{E_i} = \frac{\nu_{ji}}{E_j}, \quad (2.1-20)$$

wobei ν_{ij} die Querkontraktion in Richtung x_j infolge einer Dehnung in Richtung x_i darstellt. Es sind in diesem Fall also 9 unabhängige Materialkonstanten erforderlich und zwar drei Elastizitätsmoduln E_1 , E_2 , E_3 in den drei Koordinatenrichtungen x_1 , x_2 und x_3 , drei Querkontraktionszahlen ν_{12} , ν_{23} , ν_{13} und drei Schubmoduln G_{12} , G_{23} , G_{31} . Natürlich können diese Größen über die Symmetriebedingungen wieder durch andere Größen ausgedrückt werden.

¹⁵ Die Ableitung erfolgt durch Aufstellen des Zusammenhanges zwischen den Dehnungen und den Spannungen in der Form

$$\begin{aligned} \epsilon_{11} &= \frac{1}{E_1}\sigma_{11} - \nu_{21}\frac{1}{E_2}\sigma_{22} - \nu_{31}\frac{1}{E_3}\sigma_{33} & \gamma_{12} &= \frac{1}{G_{12}}\sigma_{12} \\ \epsilon_{22} &= -\nu_{12}\frac{1}{E_1}\sigma_{11} + \frac{1}{E_2}\sigma_{22} - \nu_{32}\frac{1}{E_3}\sigma_{33} & \gamma_{23} &= \frac{1}{G_{23}}\sigma_{23} \\ \epsilon_{33} &= -\nu_{13}\frac{1}{E_1}\sigma_{11} - \nu_{23}\frac{1}{E_2}\sigma_{22} + \frac{1}{E_3}\sigma_{33} & \gamma_{31} &= \frac{1}{G_{31}}\sigma_{31} \end{aligned}$$

und die Inversion dieses Zusammenhanges.

2.2. Variationsformulierungen

Grundsätzlich besteht die Möglichkeit, eine Randwertaufgabe der Elastostatik mit Hilfe von Differentialgleichungen oder mit Hilfe einer Variationsformulierung zu beschreiben. Die Methode der finiten Elemente basiert üblicherweise auf einer Variationsformulierung des Problems. Falls keine Variationsformulierung bekannt ist, kann beispielweise unter Verwendung der Methode der gewichteten Residuen (MWR) auch direkt von den Differentialgleichungen ausgegangen werden.¹⁶ Wir betrachten hier zunächst nur die beiden klassischen Einfeldformulierungen und zwar:

1. *Das Prinzip der virtuellen Verschiebungen* (bzw. das *Prinzip vom Minimum des Elastischen Gesamtpotentials*).
2. *Das Prinzip der virtuellen Spannungen* (*Prinzip vom Minimum des Ergänzungspotentials*).¹⁷

1. Das Prinzip der virtuellen Verschiebungen

Für einen Spannungszustand, der die statischen Verträglichkeits- und Randbedingungen (2.1-6) und (2.1-7) erfüllt, ist die bei einer virtuellen Verschiebung geleistete Arbeit der inneren Kräfte δW_I gleich der virtuellen Arbeit der äußeren Kräfte δW_A .

$$\delta W_I - \delta W_A = 0 \quad (2.2-1)$$

Das Prinzip kann in folgender Form geschrieben werden:

$$\int_V \delta \mathbf{e}^T \mathbf{s} \, dV - \int_V \delta \mathbf{u}^T \bar{\mathbf{p}} \, dV - \int_{O_q} \delta \mathbf{u}^T \bar{\mathbf{q}} \, dO = 0 \quad (2.2-2)$$

mit den Nebenbedingungen (2.1-1) und (2.1-5)

$$\begin{array}{ll} \mathbf{e} = \mathbf{D}\mathbf{u} & \text{in } V \\ \mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} & \text{auf } O_u \end{array}$$

Damit ist (2.2-2) den Grundgleichungen (2.1-6) und (2.1-7) identisch. Zum Beweis wird (2.2-2) unter Verwendung des *Gaußschen* Integralsatzes umgeformt, und man erhält:

$$-\int_V \delta \mathbf{u}^T (\mathbf{D}^T \mathbf{s} + \bar{\mathbf{p}}) \, dV + \int_{O_q} \delta \mathbf{u}^T (\mathbf{q} - \bar{\mathbf{q}}) \, dO + \int_{O_u} \delta \mathbf{u}^T \mathbf{q} \, dO = 0 \quad (2.2-3)$$

Wegen (2.1-5) müssen die Verschiebungsrandbedingungen von \mathbf{u} erfüllt werden, so daß der unterstrichene Term in (2.2-3) verschwindet ($\delta \bar{\mathbf{u}} = \mathbf{0}$), und man erhält nach dem Fundamentallemma der Variationsrechnung als *Eulersche* Gleichungen des Variationsprinzips die Gleichgewichtsbedingungen (2.1-6) und außerdem die Spannungsrandbedingungen (2.1-7). Wird vorausgesetzt, daß sich die Spannungen und Belastun

¹⁶ Siehe dazu die Vorlesung *Mathematische und Numerische Methoden der Mechanik - Teil I*

¹⁷ Eine Diskussion zu erweiterten Prinzipien und deren Anwendung in der FEM findet sich in dem Vorlesungsskript U. Gabbert: *Variationsprinzipie für die Methode der finiten Elemente*.

gen aus Potentialen ableiten lassen,¹⁸ kann das Prinzip der virtuellen Verschiebungen durch die Variation des Gesamtpotentials (Elastisches Potential) p abgeleitet werden.

$$\pi = \frac{1}{2} \int_V \mathbf{e}^T \mathbf{s} dV - \int_V \mathbf{u}^T \bar{\mathbf{p}} dV - \int_{O_q} \mathbf{u}^T \bar{\mathbf{q}} dO \rightarrow \text{Min.} \quad (2.2-4)$$

Setzt man in Gleichung (2.2-4) die Gleichungen (2.1-1) und (2.1-9) ein, ergibt sich

$$\pi = \frac{1}{2} \int_V (\mathbf{D}\mathbf{u})^T \mathbf{E}(\mathbf{D}\mathbf{u}) dV - \int_V \mathbf{u}^T \bar{\mathbf{p}} dV - \int_{O_q} \mathbf{u}^T \bar{\mathbf{q}} dO \rightarrow \text{Min.} \quad (2.2-5)$$

$$\delta\pi = 0$$

mit den Nebenbedingungen

$$\mathbf{e} = \mathbf{D}\mathbf{u}$$

in V

$$\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}}$$

auf O_u

Die Formulierung (2.2-5) besagt, daß für die exakte Lösung \mathbf{u} , die die kinematischen Randbedingungen erfüllt, das *Elastische Potential* einen minimalen Wert annimmt. Diese Bedingung stellt in der Elastomechanik die übliche Ausgangsgleichung für die Anwendung der Methode der finiten Elemente dar. Wir werden im nächsten Abschnitt nur noch die Anfangsverzerrungen \mathbf{e}_0 in Gleichung (2.1-1) ergänzen, wie sie beispielsweise durch Temperaturänderungen in der Form $\mathbf{e}_0 = \mathbf{a}_{th} T$ entstehen. Dadurch erweitert sich Gleichung (2.1-1) zu $\mathbf{e} = \mathbf{D}\mathbf{u} - \mathbf{e}_0$.

Über die Art des Extremwertes von p gibt die zweite Variation Aufschluß. Diese ist bei positiv definierter Matrix \mathbf{E} (was für *Hookesches Material* stets gilt) größer als Null, so daß der Extremwert von p ein absolutes Minimum ist.¹⁹

¹⁸ Die Existenz von Potentialen besagt, daß die Arbeit der inneren und äußeren Kräfte nicht vom Weg (d.h. der Belastungsgeschichte) abhängen, sondern nur vom Anfangs- und Endpunkt. Bezeichnet man beispielsweise die auf das Volumen bezogene Arbeit der inneren Kräfte mit

$$W_I(\mathbf{e}) = \frac{1}{2} \mathbf{e}^T \mathbf{E} \mathbf{e},$$

dann folgt aus der Wegunabhängigkeit auch die Existenz des totalen Differentials

$$dW_I = \left(\frac{\partial W_I}{\partial \mathbf{e}} \right)^T d\mathbf{e} = \mathbf{e}^T \mathbf{E} d\mathbf{e} = \mathbf{s}^T d\mathbf{e},$$

mit $\frac{\partial W_I}{\partial \mathbf{e}} = \mathbf{E} \mathbf{e} = \mathbf{s}$.

Siehe dazu beispielsweise G. Mehlhorn (Hrsg.): *Der Ingenieurbau - Rechnerorientierte Baumechanik*. Ernst&Sohn Verlag 1995, S.153ff.

¹⁹ Aus (2.2-5) folgt

$$\delta\pi = \int_V (\mathbf{D}\delta\mathbf{u})^T \mathbf{E}(\mathbf{D}\delta\mathbf{u}) dV - \int_V \delta\mathbf{u}^T \bar{\mathbf{p}} dV - \int_{O_q} \delta\mathbf{u}^T \bar{\mathbf{q}} dO,$$

und daraus $\delta^2\pi = \int_V (\mathbf{D}\delta\mathbf{u})^T \mathbf{E}(\mathbf{D}\delta\mathbf{u}) dV = \int_V \delta\mathbf{e}^T \mathbf{E} \delta\mathbf{e} dV \geq 0,$

wenn \mathbf{E} eine positiv definite Matrix ist.

2. Das Prinzip der virtuellen Spannungen

Für einen Verzerrungszustand, der die kinematischen Verträglichkeits- und Randbedingungen (2.1-1) und (2.1-5) erfüllt, ist die bei einer virtuellen Spannungsänderung geleistete Arbeit der inneren Kräfte gleich der virtuellen Arbeit der äußeren Kräfte (2.2-1).

Wenn man beachtet, daß die fest vorgegebenen Größen (Volumen- und Oberflächenkräfte) nicht variiert werden, kann das Prinzip der virtuellen Spannungen folgendermaßen geschrieben werden:

$$\int_V \delta \mathbf{s}^T \mathbf{e} dV - \int_{O_u} \delta \mathbf{q}^T \bar{\mathbf{u}} dO = 0 \quad (2.2-6)$$

mit den Nebenbedingungen (2.1-6) und (2.1-7)

$$\begin{aligned} \mathbf{D}^T \mathbf{s} + \bar{\mathbf{p}} &= \mathbf{0} && \text{in } V \\ \mathbf{q} &= \bar{\mathbf{q}} && \text{auf } O_q \end{aligned}$$

Auch hier wird das Materialgesetz a priori als gegeben vorausgesetzt. Damit ist (2.2-6) den Grundgleichungen (2.1-1) und (2.1-5) äquivalent. Umformen von (2.2-6) unter Verwendung des GAUßschen Integralsatzes liefert

$$\int_V \delta \mathbf{s}^T (\mathbf{e} - \mathbf{D}\mathbf{u}) dV - \int_{O_u} \delta \mathbf{q}^T (\bar{\mathbf{u}} - \mathbf{u}) dO + \int_{O_q} \delta \mathbf{q}^T \mathbf{u} dO - \int_V \delta (\mathbf{D}^T \mathbf{s})^T \mathbf{u} dV = 0$$

Wegen (2.1-6) und (2.1-7) verschwinden die unterstrichenen Ausdrücke und man erhält nach dem Fundamentallemma der Variationsrechnung als *Eulersche* Gleichungen des Variationsprinzips die kinematischen Gleichgewichtsbedingungen und die kinematischen Randbedingungen. Es sei wieder vorausgesetzt, daß sich die Spannungen und Belastungen aus Potentialen ableiten lassen. Dann kann das Prinzip der virtuellen Spannungen auch durch die Variation des konjugierten Gesamtpotentials (auch Ergänzungspotential) π^* ausgedrückt werden.

$$\pi^* = \frac{1}{2} \int_V \mathbf{s}^T \mathbf{e} dV - \int_{O_u} \mathbf{q}^T \bar{\mathbf{u}} dO \rightarrow \text{Min.} \quad (2.2-7)$$

$$\delta \pi^* = 0$$

$$\begin{aligned} \text{mit den Nebenbedingungen} \quad \mathbf{D}^T \mathbf{s} + \bar{\mathbf{p}} &= \mathbf{0} && \text{in } V \\ \mathbf{q} &= \bar{\mathbf{q}} && \text{auf } O_q \end{aligned}$$

Über die Art des Extremwertes gibt die zweite Variation Aufschluß. Für den Gültigkeitsbereich des *Hookeschen* Gesetzes (\mathbf{E} - positiv definit) ist die zweite Variation größer als Null, so daß der Extremwert von π^* ein absolutes Minimum ist.

Bei der Betrachtung der beiden genannten Variationsprinzipien wird ihr dualer Zusammenhang deutlich: Die Zwangsbedingungen des einen Prinzips stellen die natürlichen Bedingungen des anderen dar und umgekehrt.

In der FEM wird das *Prinzip vom Minimum des Elastischen Potentials* bevorzugt, da sich problemlos Näherungsfunktionen für die Verschiebungen konstruieren lassen, die die Nebenbedingungen des Prinzips erfüllen. Es ist für den allgemeinen Fall schwieriger, Spannungsansätze zu finden, die sämtliche Gleichgewichtsbedingungen erfüllen. Außerdem ist dann die Bestimmung der Verschiebungen aus den Spannungen (Integration) ein weiteres Problem.

2.3. Die Verschiebungsgrößenmethode

Das Prinzip vom Minimum des Elastischen Potentials

Die Ausgangsbasis für die Ableitung von finiten Elementen nach der Verschiebungsgrößenmethode ist das *Prinzip vom Minimum des Elastischen Potentials* in der Form der Gleichung (2.2-4). Wir wollen, wie bereits erwähnt, Anfangsverzerrungen ergänzen und erhalten²⁰ aus

$$\pi = \frac{1}{2} \int_V \mathbf{e}^T \mathbf{s} \, dV - \int_V \mathbf{u}^T \bar{\mathbf{p}} \, dV - \int_{O_q} \mathbf{u}^T \bar{\mathbf{q}} \, dO \rightarrow \text{Min.} \quad (2.3-1)$$

mit den Nebenbedingungen

$$\mathbf{e} = \mathbf{D}\mathbf{u} - \bar{\mathbf{e}}_0 \quad \text{in } V, \quad (2.3-2)$$

$$\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} \quad \text{auf } O_u, \quad (2.3-3)$$

und dem Zusammenhang zwischen Spannungen und Verzerrungen

$$\mathbf{s} = \mathbf{E}\mathbf{e} = \mathbf{E}(\mathbf{D}\mathbf{u} - \bar{\mathbf{e}}_0), \quad (2.3-4)$$

die gewünschte Ausgangsgleichung. Wenn außerdem noch Einzelkräfte berücksichtigt werden sollen,²¹ ist in Gleichung (2.3-1) die Arbeit der äußeren Lasten um einen Anteil zu erweitern, der sich aus der Kraft multipliziert mit der Verschiebung in der Krafttrichtung ergibt. Wenn wir generell nur Kräfte in Richtung der Achsen des globalen kartesischen Koordinatensystems zulassen, was keine Einschränkung darstellt, da jede Kraft in diese Richtungen zerlegt werden kann, ergibt sich ein zusätzlicher Term der Form

$$\sum_{k=1}^{n_F} \mathbf{u}_k^T \bar{\mathbf{F}}_k \quad (2.3-5)$$

Dabei bezeichnet k den Ort des Kraftangriffs, \mathbf{u}_k und $\bar{\mathbf{F}}_k$ sind der vollständige Verschiebungs- bzw. der gegebene Kraftvektor an dieser Stelle, und n_F bezeichnet die Anzahl der Punkte, an denen Einzelkräfte angreifen. Damit ergibt sich aus (2.3-1)

$$\pi = \frac{1}{2} \int_V \mathbf{e}^T \mathbf{s} \, dV - \int_V \mathbf{u}^T \bar{\mathbf{p}} \, dV - \int_{O_q} \mathbf{u}^T \bar{\mathbf{q}} \, dO - \sum_{k=1}^{n_F} \mathbf{u}_k^T \bar{\mathbf{F}}_k \rightarrow \text{Min.} \quad (2.3-6)$$

In der *Verschiebungsgrößenmethode* sind die Verschiebung die primären Unbekannten. Den Verschiebungszustand in einem Bauteil oder in einem beliebigen Körper wollen wir durch elementweise definierte Näherungsfunktionen approximieren. Diese Funktionen sind nur in jeweils einem Element definiert, außerhalb des Elementes sind sie Null. Unter Beachtung dieser Tatsache kann das elastische Gesamtpotential p als

²⁰ Über die Beschreibung der Anfangsverzerrungen lassen sich hier auch problemlos Anfangsspannungen berücksichtigen, so daß diese nicht gesondert behandelt werden.

²¹ Verschieben und Einzelkräfte sind hier als verallgemeinerte Größen aufzufassen, d.h. es kann sich in bestimmten Fällen (z.B. bei Platten oder Schalen) auch um Verdrehungen bzw. Momente handeln.

eine Summe von elastischen Potentialen $p^{(e)}$ aller $n^{(e)}$ finiten Elemente eines Netzes geschrieben werden.

$$\pi = \sum_{e=1}^{n^{(e)}} \pi^{(e)} \quad (2.3-7)$$

Damit kann auch die Minimierung von p , d.h. die Ableitung von p nach den Unbekannten des Verschiebungsansatzes – den Knotenverschiebungen – für jedes Element einzeln ausgeführt werden.

$$\delta\pi = \sum_{e=1}^{n^{(e)}} \delta\pi^{(e)} = 0 \quad \rightarrow \quad \delta\pi^{(e)} = 0, \quad e = 1 \dots n^{(e)} \quad (2.3-8)$$

Die Ergebnisse der elementweisen Minimierung von π müssen dann entsprechend Gleichung (2.3-8) nur noch „addiert“ werden. Aus dieser Addition läßt sich leicht der Algorithmus zum Aufbau des Gesamtgleichungssystems aus den Elementbeiträgen (Elementsteifigkeitsmatrizen und –lastvektoren) herleiten (vergleiche dazu die Ausführungen im Abschnitt 1.4).

Üblicherweise verwendet man in jedem finiten Element eines Elementnetzes den gleichen Typ von Näherungsfunktionen. Das muß aber nicht immer der Fall sein, wie wir später (z.B. bei p -Elementen oder der Verknüpfung unterschiedlicher Elementtypen in einem Netz mit Hilfe von Übergangselemente, der Methode der LAGRANGESchen Multiplikatoren oder der Penalty-Methode) noch sehen werden.

Wir wollen uns nachfolgend typischen Näherungsfunktionen, die wir auch als *Ansatzfunktionen* (oder im englischen Sprachgebrauch *shape functions*) bezeichnen, genauer ansehen.

Verschiebungsansatzfunktionen (shape functions)

Für ein beliebiges finites Element führen wir folgenden Näherungsansatz für die gesuchte Feldgröße \mathbf{u} ein

$$\mathbf{u} = \mathbf{P}(\mathbf{x})\mathbf{a} \quad (2.3-9)$$

Die Matrix $\mathbf{P}(\mathbf{x})$ enthält dabei die Näherungsfunktionen, die im dreidimensionalen Fall von den Koordinaten $\mathbf{x}^T = [x_1, x_2, x_3]$ abhängig sind. Die Matrix $\mathbf{P}(\mathbf{x})$ enthält meist die Terme von möglichst vollständigen Polynomen. Wir werden später noch sehen, daß durch das höchste vollständige Polynom in dem Näherungsansatz die Konvergenzgeschwindigkeit der Lösung bestimmt wird. Natürlich können prinzipiell auch trigonometrische Funktionen oder andere Funktionensysteme zur Konstruktion geeigneter Ansatzfunktionen verwendet werden. Der Vektor \mathbf{a} enthält die Unbekannten des Ansatzes, die keine physikalische Bedeutung besitzen. Wir werden nachfolgend zeigen, daß es vorteilhaft ist, diese Unbekannten äquivalent durch andere Unbekannte zu ersetzen, die eine physikalische Bedeutung haben – z.B. als Verschiebungen an den Knotenpunkten eines Elementes.

Die Beispiele für Ansatzfunktionen des Typs (2.3-9) zeigen den typischen Aufbau der Matrix \mathbf{P} , die üblicherweise aus Polynomansätzen (daher die Bezeichnung \mathbf{P}) gebildet werden.²²

Nachfolgend werden wir die Unbekannten a_i äquivalent durch die Knotenverschiebungen ersetzt²³ Dazu müssen wir den Ansatz (2.3-9) für jeden Knoten eines finiten Elementes anschreiben, wobei sich dann jeweils die an dem Knoten vorhandenen Knotenverschiebungen ergeben. Fassen wir diese Knotenverschiebungen zu einem Vektor $\mathbf{v}^T = [u_1 \quad v_1 \quad w_1 \quad u_2 \quad \dots \quad v_n \quad w_n]$ zusammen, der sämtliche Knotenunbekannten enthält, ergibt sich

$$\mathbf{v} = \mathbf{A}\mathbf{a} \quad (2.3-10)$$

Die Matrix \mathbf{A} enthält die Koordinaten der Knotenpunkte, denn diese wurden ja in \mathbf{P} eingesetzt, um die quadratische Matrix \mathbf{A} zu erhalten. Wir können jetzt aus (2.3-10) die primären Unbekannten \mathbf{a} durch die Unbekannten \mathbf{v} ausdrücken und erhalten

$$\mathbf{a} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{v} \quad (2.3-11)$$

Wir setzen (2.3-11) in den ursprünglichen Ansatz (2.3-9) ein und erhalten

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{P}(\mathbf{x})\mathbf{A}^{-1}\mathbf{v} \quad (2.3-12)$$

Führen wir noch die Abkürzung

$$\mathbf{N}(\mathbf{x}) = \mathbf{P}(\mathbf{x})\mathbf{A}^{-1} \quad (2.3-13)$$

ein, wobei die Matrix $\mathbf{N}(\mathbf{x})$ als die *Matrix der Formfunktionen* bezeichnet werden soll, erhalten wir schließlich die neue Form des Verschiebungsansatzes

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{N}(\mathbf{x})\mathbf{v}, \quad (2.3-14)$$

in die als Unbekannte die Knotenverschiebungen eingehen, die im Vektor \mathbf{v} zusammengefaßt sind. In der Fußnote ist beispielhaft für ein Dreieckselement mit drei Kno-

²² Im eindimensionalen Fall (1D) sieht die Funktion bei einem linearen Ansatz im Element folgendermaßen aus:

$$u = a_1 + a_2x = [1 \quad x] \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \mathbf{P}(x)\mathbf{a}$$

$\mathbf{P}(x)$ ist also eine Matrix, die die gewählten Polynomansätze enthält. Für einen quadratischen Ansatz ergibt sich entsprechend

$$u = a_1 + a_2x + a_3x^2 = [1 \quad x \quad x^2] \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \mathbf{P}(x)\mathbf{a},$$

und für ein Dreieckselement mit drei Knoten erhält man

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x & y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_6 \end{bmatrix} = \mathbf{P}(x, y)\mathbf{a}$$

Deutlich erkennt man, daß jetzt in jeder der beiden Koordinatenrichtungen x_1 und x_2 ein linearer Näherungsansatz eingeführt wurde.

²³ Das ist jedoch nicht zwangsläufig erforderlich, wie wir später noch sehen werden.

tenpunkten (ein finites Element zur Scheibenberechnung, siehe auch Abschnitt 3) dargestellt, wie man von (2.3-1) zu (2.3-14) gelangt.²⁴

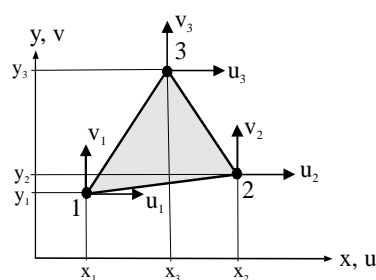
Anforderungen an die Formfunktionen

Um die Konvergenz der Finite-Element-Methode zu sichern, muß bei einer unendlich feinen Zerlegung des Lösungsgebietes in finite Elemente die Näherungslösung gegen die exakte Lösung des Modellproblems (mathematisches Modell) konvergieren. Um das zu garantieren, müssen die Formfunktionen eine Reihe von Bedingungen erfüllen. Bei der Behandlung des *Ritz*schen Verfahrens²⁵ hatten wir schon über Bedingungen für die Näherungsfunktionen bei diesem Verfahren diskutiert. Wenn man die FEM als *Ritz*-Verfahren mit stückweise (elementweise) definierten Näherungsfunktionen auffaßt, kann man diese Bedingungen auf die FEM übertragen. Wir werden im Abschnitt 6 noch einmal auf dieses Problem eingehen und halten hier zunächst nur einige wichtige Bedingungen fest.

1. Die Formfunktionen müssen zwischen benachbarten Elementen stetig sein.

Die Funktionen in $\mathbf{N}(\mathbf{x})$ müssen so gewählt werden, daß die Kontinuität der Verschiebungen und ihrer Ableitungen über die Elementgrenzen hinweg garantiert ist. Der Grad dieser Stetigkeitsforderung, d.h. bis zu welcher Ableitung die Bedingung erfüllt sein muß, hängt von der höchsten Ableitung ab, die in der Variationsformulierung auftritt. Wir sprechen von einer C_0 -Stetigkeit, wenn nur die Verschiebungen selbst zwischen benachbarten Elementränder stetig sind und diese auf dem Gebietsrand die Verschiebungsrandbedingungen erfüllen. Diese Bedingungen müssen erfüllt sein, wenn im Variationsfunktional maximal erste Ableitungen der Verschiebungen auftreten. Von C_1 -Stetigkeit sprechen wir, wenn sowohl die Verschiebungen als auch ihre

²⁴ An dem nachfolgend skizzierten Dreieckselement mit 3 Knoten, soll die Herleitung von \mathbf{G} aus \mathbf{N} erläutert werden.



Der Auswertung des Polynomansatzes für das lineare Dreieckselement (siehe Fußnote 9) lautet

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \end{bmatrix} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{a}$$

Die Inversion von \mathbf{A} und Multiplikation mit \mathbf{P} liefert $\mathbf{N} = \mathbf{P}\mathbf{A}^{-1}$:

$$\mathbf{N} = \mathbf{P}\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 \end{bmatrix} = [\mathbf{N}_1 \quad \mathbf{N}_2 \quad \mathbf{N}_3]$$

mit

$$N_1 = \left[(xy)_{23} + (y)_{23}x + (x)_{32}y \right] \frac{1}{2A}, \quad N_2 = \left[(xy)_{31} + (y)_{31}x + (x)_{13}y \right] \frac{1}{2A}, \quad N_3 = \left[(xy)_{12} + (y)_{12}x + (x)_{21}y \right] \frac{1}{2A}$$

und

$$(xy)_{kl} = x_k y_l - x_l y_k, \quad (x)_{kl} = x_k - x_l, \quad (y)_{kl} = y_k - y_l, \quad 2A = (xy)_{23} + (xy)_{31} + (xy)_{12},$$

wobei A der Flächeninhalt des Dreiecks ist.

²⁵ Siehe Teil I des Vorlesungsskript *Mathematische und Numerische Methoden der Mechanik*.

sämtlichen ersten Ableitungen zwischen benachbarten Elementränder stetig sind. Diese Bedingung muß erfüllt sein, wenn im Variationsfunktional maximal Ableitungen der Verschiebungen bis zur zweiten Ordnung auftreten. Das ist beispielsweise bei Balken-, Platten- und Schalenmodellen der Fall. Wir sprechen allgemein von einer C_n -Stetigkeit, wenn die Verschiebungen und sämtliche Ableitungen bis zur n-ten Ordnung zwischen benachbarten finiten Elementen stetig sind. Diese Bedingung muß dann erfüllt sein, wenn im Variationsfunktional maximal Verschiebungsableitungen bis zur Ordnung n+1 auftreten.

2. Starrkörperverschiebungen dürfen keine Verzerrungen hervorrufen

Bei Starrkörperverschiebungen und/oder Verdrehungen eines finiten Elementes dürfen im Element keine durch den Näherungsansatz bedingten Verzerrungen und damit Spannungen auftreten. Diese Bedingung klingt zwar selbstverständlich, ist aber in bestimmten Fällen (z.B. bei Schalenelementen) nicht immer leicht zu erfüllen. Sie ist oftmals nur für kleine Verschiebungen näherungsweise erfüllt, was zur Konsequenz hat, daß derartige finite Element nicht für die Berechnung großer Verformungen benutzt werden dürfen. Wir wollen an einem einfachen Fall zeigen, welche Konsequenz sich beispielsweise aus dieser Forderung für die Ansatzfunktionen ergibt. Der Verschiebungsansatz für ein finites Element lautet entsprechend Gleichung (2.3-14)

$$\mathbf{u} = \mathbf{N}(\mathbf{x})\mathbf{v} = \sum_{L=1}^n \mathbf{N}_L(\mathbf{x})\mathbf{u}_L, \quad (2.3-15)$$

wobei n die Anzahl der Knotenpunkte des Elementes ist. Wenn das Element während der Rechnung sowohl eine Deformation erleidet, die durch den Knotenverschiebungsvektor $\mathbf{v}^T = [\mathbf{u}_1^T \quad \dots \quad \mathbf{u}_L^T \quad \dots \quad \mathbf{u}_n^T]$ beschrieben wird, als auch einer vorgegebenen Starrkörperverschiebung, z.B. $\Delta\bar{\mathbf{u}}^T = [\Delta\bar{u} \quad \Delta\bar{v} \quad \Delta\bar{w}]$ unterliegt, so ergibt sich für die Verzerrungen \mathbf{e} an einem beliebigen Punkt im Element

$$\begin{aligned} \mathbf{e} &= \mathbf{D}\mathbf{u} = \mathbf{D}\left(\sum_{L=1}^n \mathbf{N}_L(\mathbf{u}_L + \Delta\bar{\mathbf{u}})\right) \\ &= \mathbf{D}\left(\sum_{L=1}^n (\mathbf{N}_L \mathbf{u}_L)\right) + \mathbf{D}\left(\sum_{L=1}^n \mathbf{N}_L\right) \cdot \Delta\bar{\mathbf{u}} \end{aligned} \quad (2.3-16)$$

Der erste Summand liefert die sich aus der Deformation ergebenden Verzerrungen. Der zweite Summand rührt aus der Starrkörperverschiebung her und muß Null ergeben. Das ist offensichtlich dann der Fall, wenn $\sum_{L=1}^n \mathbf{N}_L$ konstant ist, da dann die Anwendung der Differentiationsmatrix \mathbf{D} auf diesen Term Null ergibt. Die Summe muß genau gleich 1 sein, da sich dann die Starrkörperverschiebung auch richtig aus dem Gesamtverschiebungszustand berechnen läßt.

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{\text{gesamt}} &= \left(\sum_{L=1}^n \mathbf{N}_L(\mathbf{u}_L + \Delta\bar{\mathbf{u}})\right) = \left(\sum_{L=1}^n (\mathbf{N}_L \mathbf{u}_L)\right) + \left(\sum_{L=1}^n \mathbf{N}_L\right) \cdot \Delta\bar{\mathbf{u}} \\ &= \mathbf{u} + \Delta\bar{\mathbf{u}} \end{aligned} \quad (2.3-17)$$

Daraus folgt als Bedingung für die Formfunktionen:

$$\sum_{L=1}^n \mathbf{N}_L = \mathbf{I}, \quad (2.3-18)$$

wobei \mathbf{I} die Einheitsmatrix ist. Die Summe aller Formfunktionen muß also genau den Wert 1 ergeben, was man z.B. bei dem Ergebnis in Fußnote 24 nachprüfen kann.

3. Die finiten Elemente müssen mindestens einen konstanten Spannungszustand exakt approximieren.

Wenn die Knotenverschiebungen einem konstanten Verzerrungszustand entsprechen, muß die Näherungsfunktion für die Verschiebungen diesen auch exakt liefern. Damit schließt dieses Kriterium das vorhergehende mit ein, da ja Starrkörperbewegungen nur einen Sonderfall konstanter Verzerrungen mit dem Wert Null sind.

Auf weitere Probleme bezüglich der Wahl der Näherungsfunktionen und ihres Einflusses auf die Genauigkeit und Konvergenzgeschwindigkeit der Lösung wird in Abschnitt 7 eingegangen.

2.4. Steifigkeits-, Massen- und Belastungsmatrizen

Alle nachfolgenden Betrachtungen gelten für ein beliebiges finites Einzelement, d.h. wenn wir das elastische Gesamtpotential π betrachten, berechnen wir nachfolgend nur den Anteil $\pi^{(e)}$ aus Gleichung (2.3-7). Wir werden im Abschnitt 2.5. noch sehen, wie sich aus diesen Elementbeiträgen das Gesamtsystem aufbauen läßt.

Elementsteifigkeitsmatrix und -kraftvektor

Als Ausgangsbasis benutzen wir das Prinzip vom *Minimum des Elastischen Potentials* entsprechend Gleichung (2.3-6). Setzen wir in den Zusammenhang zwischen Verzerungen und Verschiebungen Gleichung (2.3-2) $\mathbf{e} = \mathbf{D}\mathbf{u} - \bar{\mathbf{e}}_0$ den Verschiebungsansatz (2.3-14) ein, ergibt sich

$$\mathbf{e} = \mathbf{D}(\mathbf{N})\mathbf{v} - \bar{\mathbf{e}}_0 \quad (2.4-1)$$

mit der Abkürzung

$$\mathbf{B} = \mathbf{D}(\mathbf{N}) \quad (2.4-2)$$

erhalten wir daraus

$$\mathbf{e} = \mathbf{B}\mathbf{v} - \bar{\mathbf{e}}_0 \quad (2.4-3)$$

Für die Spannungen erhält man dann aus (2.3-4)

$$\mathbf{s} = \mathbf{E}\mathbf{e} = \mathbf{E}\mathbf{B}\mathbf{v} - \mathbf{E}\bar{\mathbf{e}}_0 \quad (2.4-4)$$

Setzen wir die Gleichungen (2.4-1) und (2.4-4) in die Gleichung für das *Elastische Potential* (2.3-6) ein, erhalten wir

$$\begin{aligned} \pi = & \frac{1}{2} \int_V (\mathbf{B}\mathbf{v} - \bar{\mathbf{e}}_0)^T \mathbf{E} (\mathbf{B}\mathbf{v} - \bar{\mathbf{e}}_0) dV - \int_V (\mathbf{N}\mathbf{v})^T \bar{\mathbf{p}} dV \\ & - \int_{O_q} (\mathbf{N}\mathbf{v})^T \bar{\mathbf{q}} dO - \sum_{k=1}^{n_F} [\mathbf{N}(\mathbf{x}_k) \mathbf{v}]^T \bar{\mathbf{F}}_k \end{aligned}$$

Durch Ausmultiplizieren ergibt sich daraus

$$\begin{aligned} \pi = & \frac{1}{2} \int_V \mathbf{v}^T \mathbf{B}^T \mathbf{E} \mathbf{B} \mathbf{v} dV - \frac{1}{2} \int_V \mathbf{v}^T \mathbf{B}^T \mathbf{E} \cdot \bar{\mathbf{e}}_0 dV - \frac{1}{2} \int_V \bar{\mathbf{e}}_0^T \mathbf{E} \mathbf{B} \mathbf{v} dV \\ & - \frac{1}{2} \int_V \bar{\mathbf{e}}_0^T \mathbf{E} \bar{\mathbf{e}}_0 dV - \int_V \mathbf{v}^T \mathbf{N}^T \bar{\mathbf{p}} dV - \int_{O_q} \mathbf{v}^T \mathbf{N}^T \bar{\mathbf{q}} dO - \sum_{k=1}^{n_F} \mathbf{v}^T \mathbf{N}^T(\mathbf{x}_k) \bar{\mathbf{F}}_k \rightarrow \text{Min.} \end{aligned}$$

Die Knotenverschiebungsvektoren können ausgeklammert werden, und es ergibt sich

$$\pi = \frac{1}{2} \mathbf{v}^T \mathbf{K} \mathbf{v} - \mathbf{v}^T \mathbf{f} - \frac{1}{2} \int_V \bar{\mathbf{e}}_0^T \mathbf{E} \bar{\mathbf{e}}_0 dV$$

mit den folgenden Abkürzungen.

Elementsteifigkeitsmatrix

$$\mathbf{K} = \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{E} \mathbf{B} dV \quad (2.4-5)$$

Elementkraftvektor

$$\mathbf{f} = \mathbf{f}_{\varepsilon_0} + \mathbf{f}_p + \mathbf{f}_q + \mathbf{f}_F \quad (2.4-6)$$

Kraftvektor infolge von Anfangsverzerrungen

$$\mathbf{f}_{\varepsilon_0} = \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{E} \bar{\mathbf{e}}_0 dV \quad (2.4-7)$$

Kraftvektor infolge von Volumenlasten

$$\mathbf{f}_p = \int_V \mathbf{N}^T \bar{\mathbf{p}} dV \quad (2.4-8)$$

Kraftvektor infolge von Oberflächenlasten

$$\mathbf{f}_q = \int_{O_q} \mathbf{N}^T \bar{\mathbf{q}} dO \quad (2.4-9)$$

Kraftvektor infolge von Einzelkräften

$$\mathbf{f}_F = \sum_{k=1}^{n_F} \mathbf{N}^T(\mathbf{x}_k) \mathbf{F}_k \quad (2.4-10)$$

Die Minimierung des *Elastischen Potentials* bezüglich der Knotenverschiebungen \mathbf{v} liefert für ein Einzelement²⁶

$$\delta\pi = \frac{\partial\pi}{\partial\mathbf{v}} = \mathbf{K} \cdot \mathbf{v} - \mathbf{f} = \mathbf{0} \quad (2.4-11)$$

und wir erhalten die sogenannte *Elementsteifigkeitsbeziehung*

$$\mathbf{K}\mathbf{v} = \mathbf{f}, \quad (2.4-12)$$

die den Zusammenhang zwischen den an den Knoten angreifenden Kräften \mathbf{f} und den Knotenverschiebungen \mathbf{v} vermittelt.

Elementmassenmatrix

Für die Lösung dynamischer Probleme mit Hilfe der FEM benutzen wir als Ausgangsbasis statt des Prinzips vom Minimum des Elastischen Potentials das *Hamiltonsche Prinzip*

$$\int_t L dt \rightarrow \text{stationär}. \quad (2.4-13)$$

²⁶ Zur Erinnerung vermerken wir nochmals, daß wir hier nur ein Element betrachten und daher genaugenommen immer einen Index (e), z.B. $p^{(e)}$ – d.h. bezogen auf das Element (e) – vermerken müßten. Da hier aber alle Betrachtungen stets auf ein Element bezogen sind, wird der Index (e) weggelassen.

Dabei bezeichnet L die sogenannte *Lagrangesche* Funktion, die sich folgendermaßen berechnen läßt

$$L = T - \pi. \quad (2.4-14)$$

p ist das schon bekannte Elastische Potential, und T ist die kinetische Energie

$$T = \frac{1}{2} \int_V \rho \dot{\mathbf{u}}^T \dot{\mathbf{u}} \, dV, \quad (2.4-15)$$

mit der Dichte ρ , und $\dot{\mathbf{u}} = \frac{d\mathbf{u}}{dt}$ bezeichnet die Geschwindigkeiten. Wenn man bei dynamischen Problemen die gleichen Verschiebungsfunktionen wie bei statischen Problemen benutzt und beachtet, daß die Unbekannten des Näherungsansatzes – die Knotenverschiebungen – jetzt zeitlich veränderlich sind, erhält man

$$\mathbf{u} = \mathbf{N}(\mathbf{x}) \mathbf{v}(t) \quad (2.4-16)$$

$$\dot{\mathbf{u}} = \mathbf{N}(\mathbf{x}) \cdot \dot{\mathbf{v}}(t) \quad (2.4-17)$$

Einsetzen von (2.4-17) in den Ausdruck für die kinetische Energie (2.4-15) liefert

$$T = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{v}}^T \left[\int_V \rho \mathbf{N}(\mathbf{x})^T \mathbf{N}(\mathbf{x}) \, dV \right] \dot{\mathbf{v}}. \quad (2.4-18)$$

Führt man als Abkürzung die

Massenmatrix

$$\mathbf{M} = \int_V \rho \mathbf{N}(\mathbf{x})^T \mathbf{N}(\mathbf{x}) \, dV \quad (2.4-19)$$

ein, erhält man für die *Lagrangesche* Funktion

$$L = T - \pi = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{v}}^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{v}} - \frac{1}{2} \mathbf{v}^T \mathbf{K} \mathbf{v} - \mathbf{v}^T \mathbf{f} \quad (2.4-20)$$

Aus den *Lagrangeschen* Bewegungsgleichungen (*Eulersche* Gleichung des *Hamiltonschen* Prinzips)

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{v}}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} = \mathbf{0} \quad (2.4-21)$$

ergibt sich schließlich

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{v}} + \mathbf{K} \mathbf{v} - \mathbf{f} = \mathbf{0}. \quad (2.4-22)$$

Wird noch eine geschwindigkeitsproportionale Dämpfung eingeführt, erhält man

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{v}} + \mathbf{C} \dot{\mathbf{v}} + \mathbf{K} \mathbf{v} = \mathbf{f}, \quad (2.4-23)$$

wobei \mathbf{C} die Dämpfungsmatrix bezeichnet, die häufig mittels der sogenannten *Bequemlichkeitshypothese*²⁷ aus

$$\mathbf{C} = \alpha \mathbf{M} \cdot + \beta \mathbf{K} \quad (2.4-24)$$

bestimmt wird²⁸. Das Differentialgleichungssystem (2.4-23) kann direkt numerisch integriert werden, z.B. mittels der *Zentralen Differenzenmethode*, dem *Newmark-Verfahren* oder einem anderen Verfahren²⁹. Wenn man zuerst das Eigenwertproblem löst, kann das System auf Modalkoordinaten transformiert werden. Das Eigenwertproblem erhält man, wenn man für die Lösung des homogenen ungedämpften Differentialgleichungssystems einen Lösungsansatz der Form

$$\mathbf{v}(t) = \hat{\mathbf{v}} \cos(\omega t) \quad (2.4-25)$$

einführt. Mit

$$\ddot{\mathbf{v}}(t) = -\hat{\mathbf{v}} \omega^2 \cos(\omega t) \quad (2.4-26)$$

erhält man mit $\mathbf{f}=\mathbf{0}$ aus (2.4-22) das Eigenwertproblem

$$\left(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M} \right) \hat{\mathbf{v}} = \mathbf{0} \quad (2.4-27)$$

dessen Lösung die Eigenwerte und Eigenvektoren des Systems liefert.

²⁷ Auch als *Rayleigh-Dämpfung* bezeichnet.

²⁸ Durch diese Annahme erreicht man, daß das Differentialgleichungssystem mittels der Eigenvektoren modal entkoppelt werden kann.

²⁹ Siehe dazu die Vorlesungen *Mathematische und Numerische Methoden der Mechanik - Teil II*.

2.5. Das Gesamtsystem

Assemblierung der Elementbeiträge zum Gesamtsystem

Die lokale (d.h. elementweise) Definition der Ansatzfunktionen zur Approximation der unbekannt Feldgrößen, die jeweils nur in einem Element ungleich Null sind, führt dazu, daß das *Elastische Gesamtpotential* π als Summe der *Elastischen Potentiale* der einzelnen finiten Elemente $\pi^{(e)}$ aufgeschrieben werden kann (siehe Gleichung 2.3-6).

$$\pi = \sum_e \pi^{(e)} \quad (2.5-1)$$

Der hochgestellte Index (e), der auf diesen Sachverhalt verweist, wurde im Abschnitt 2.4. zur Vereinfachung weggelassen,³⁰ wird aber hier wieder konsequent eingeführt. .

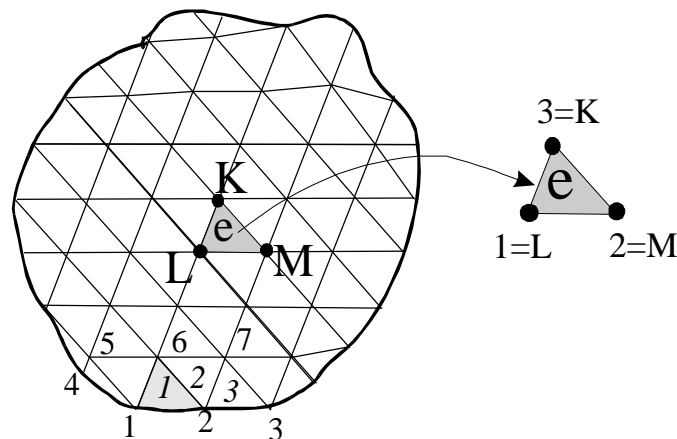


Bild 2.5-1 Globale Knotennummern L, M, K eines Dreieckselementes (e) und zugehörige lokale Knotennummern 1, 2, 3

Wir hatten bisher stillschweigend vorausgesetzt, daß die Knoten eines finiten Elementes von 1 bis $n^{(e)}$ durchnummeriert sind, wenn mit $n^{(e)}$ die Anzahl der Elementknoten bezeichnet wird. In einer Vernetzung ist jedem Elementknoten eine globale Nummer zugeordnet, die sich aus der Durchnummerierung aller Knoten eines Netzes ergibt. Im Bild 2.5-1 ist das am Beispiel eines Dreieckselementes mit 3 Knoten dargestellt. Den globalen Knotennummern L, M und N entsprechen die lokalen Knotennummern 1, 2 und 3. Mit dieser Zuordnung der lokalen Numerierung eines Elementes (diese muß natürlich für jedes finiten Element eindeutig definiert sein) zur globalen Numerierung einer Vernetzung, ist die *Topologie* eines Netzes beschrieben. Wenn man zusätzlich noch die Knotenkoordinaten aller Knoten kennt, ist das Netz auch geometrisch eindeutig beschrieben und kann z.B. graphisch dargestellt werden. Jedem Knoten sind n_{dof} Unbekannte zugeordnet.³¹

Die Abbildung zwischen den Unbekannten \mathbf{v} im globalen System (dem Gesamtnetz) und dem Einzelement $\mathbf{v}^{(e)}$ kann formal durch eine aus Nullen und Einsen bestehende Abbildungsmatrix $\mathbf{S}^{(e)}$ in der Form

³⁰ Damit gelten die Formeln in Abschnitt 2.3 auch für den Fall, daß im Sinne des *Ritzschen* Verfahrens eine kontinuierliche Ansatzfunktion für das Gesamtgebiet eingeführt wird.

³¹ So hat z.B. im 2D-Fall (Scheibenproblem) jeder Knoten L mindestens zwei Unbekannte - die Knotenverschiebungen in x- und in y-Richtung (hier als u_L und v_L bezeichnet).

$$\mathbf{v}^{(e)} = \mathbf{S}^{(e)} \mathbf{v} \quad (2.5-2)$$

beschrieben werden, wobei sich die Größen ohne hochgestellten Index (e) stets auf das Gesamtsystem beziehen. Mit (2.5-2) werden aus dem Gesamtvektor der Unbekannten, die zum e-ten Element gehörenden Unbekannten herausgezogen. Setzt man in Gleichung (2.5-1) die *Elastischen Potentiale* der Einzelemente ein, erhält man

$$\pi = \sum_e \pi^{(e)} = \sum_e \left(\frac{1}{2} \mathbf{v}^{(e)T} \mathbf{K}^{(e)} \mathbf{v}^{(e)} - \mathbf{v}^{(e)T} \mathbf{f}^{(e)} \right)$$

Mit Gleichung (2.5-2) ergibt sich daraus

$$\pi = \frac{1}{2} \mathbf{v}^T \left[\sum_e \mathbf{S}^{(e)T} \mathbf{K}^{(e)} \mathbf{S}^{(e)} \right] \mathbf{v} - \mathbf{v}^T \sum_e \mathbf{S}^{(e)T} \mathbf{f}^{(e)} \quad (2.5-3)$$

Wenn man jetzt die Minimierung von π bezüglich aller Unbekannten, die im Vektor \mathbf{v} zusammengefaßt sind, bildet, ergibt sich

$$\frac{\partial \pi}{\partial \mathbf{v}} = \left[\sum_e \mathbf{S}^{(e)T} \mathbf{K}^{(e)} \mathbf{S}^{(e)} \right] \mathbf{v} - \sum_e \mathbf{S}^{(e)T} \mathbf{f}^{(e)} = \mathbf{0} \quad (2.5-4)$$

oder

$$\mathbf{K} \mathbf{v} - \mathbf{f} = \mathbf{0}. \quad (2.5-5)$$

Der erste Summand ist die gesuchte Gesamtsteifigkeitsmatrix \mathbf{K} des Systems

$$\mathbf{K} = \sum_e \mathbf{S}^{(e)T} \mathbf{K}^{(e)} \mathbf{S}^{(e)}, \quad (2.5-6)$$

und der zweite Summand ist der Systemkraftvektor

$$\mathbf{f} = \sum_e \mathbf{S}^{(e)T} \mathbf{f}^{(e)} \quad (2.5-7)$$

Man erkennt, daß sich die Systemmatrix und der Systemkraftvektor additiv aus den Elementbeiträgen zusammensetzen. Im Abschnitt 1.4 wurde am Beispiel eines aus drei eindimensionalen finiten Elementen bestehenden Systems gezeigt, wie man über die Minimierung des Gesamtpotentials zum Gesamtgleichungssystem (2.5-5) gelangt. Das gleiche Ergebnis läßt sich auch durch die Erfüllung des Kraftgleichgewichts an jedem Knotenpunkt erzielen. Die obige Darstellung ist aber allgemeingültiger. Über die Matrix $\mathbf{S}^{(e)}$ werden die Komponenten der e-ten Elementsteifigkeitsmatrix und des e-ten Elementkraftvektors auf die Positionen in dem Gesamtgleichungssystem aufaddiert, die sich aus der Abbildung der lokalen Numerierung der Knoten (lokale Knotenfreiheitsgradnummern) auf die globalen Knotennummern (globale Knotenfreiheitsgradnummern) ergeben. Für diese Einspeicherung ist also die Tologiematrix der Vernetzung erforderlich, mit der die Position in der Gesamtsteifigkeitsmatrix berechnet werden kann, auf die ein Element aus der Elementsteifigkeitsmatrix aufaddiert werden muß. Programmtechnisch läßt sich das über einen Einspeicherungsalgorithmus für das Elementgleichungssystem realisieren. Die Beschreibung über die Gleichungen (2.5-6) und (2.5-7) hat also nur eine symbolische Bedeutung.

Beispiel 2.5-1

An dem im Bild 2.5-1 dargestellten Beispiel soll der Einspeicherungsalgorithmus verdeutlicht werden. Wir nehmen an, daß an jedem Knoten 2 Unbekannte, die Verschiebung in x-Richtung und die Verschiebung in y Richtung, vorliegen. Die Elementsteifigkeitsbeziehung für das Dreieckselement (e) mit drei Knoten hat dann sechs Gleichungen. Die knotenbezogene Struktur lautet

$$\begin{pmatrix} \mathbf{K}_{11}^{(e)} & \mathbf{K}_{12}^{(e)} & \mathbf{K}_{13}^{(e)} \\ & \mathbf{K}_{22}^{(e)} & \mathbf{K}_{23}^{(e)} \\ & & \mathbf{K}_{33}^{(e)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{v}_1^{(e)} \\ \mathbf{v}_2^{(e)} \\ \mathbf{v}_3^{(e)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{f}_1^{(e)} \\ \mathbf{f}_2^{(e)} \\ \mathbf{f}_3^{(e)} \end{pmatrix},$$

wobei die Indizes 1,2 und 3 die lokalen Knotennummern des Elementes bezeichnen. Da jedem Knoten zwei Unbekannte zugeordnet sind, hat das Elementgleichungssystem die Form

$$\begin{pmatrix} \begin{bmatrix} k_{11,11}^{(e)} & k_{11}^{(e)} \\ & k_{11}^{(e)} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} k_{12,11}^{(e)} & k_{12,12}^{(e)} \\ k_{12,21}^{(e)} & k_{12,22}^{(e)} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} k_{13,11}^{(e)} & k_{13,12}^{(e)} \\ k_{13,21}^{(e)} & k_{13,22}^{(e)} \end{bmatrix} \\ & \begin{bmatrix} k_{22,11}^{(e)} & k_{22,12}^{(e)} \\ & k_{22,22}^{(e)} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} k_{23,11}^{(e)} & k_{23,12}^{(e)} \\ k_{23,21}^{(e)} & k_{23,22}^{(e)} \end{bmatrix} \\ & & \begin{bmatrix} k_{33,11}^{(e)} & k_{33,12}^{(e)} \\ & k_{33,22}^{(e)} \end{bmatrix} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \begin{bmatrix} u_1^{(e)} \\ v_1^{(e)} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} u_2^{(e)} \\ v_2^{(e)} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} u_3^{(e)} \\ v_3^{(e)} \end{bmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{bmatrix} f_{x1}^{(e)} \\ f_{y1}^{(e)} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} f_{x2}^{(e)} \\ f_{y2}^{(e)} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} f_{x3}^{(e)} \\ f_{y3}^{(e)} \end{bmatrix} \end{pmatrix}$$

symmetrisch

Diese Art der Darstellung ermöglicht es nun, den Einspeicheralgorithmus in einer allgemeingültigen Form anzugeben. Dazu zeigen wir nachfolgend zunächst einen Ausschnitt aus der Topologiematrix \mathbf{M}_{topo} (vergleiche Bild 2.5-1):

$$\mathbf{M}_{\text{topo}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 2 & 7 & 6 \\ 2 & 3 & 7 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ L & M & K \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}$$

Wenn wir nun voraussetzen, daß die Gesamtsteifigkeitsmatrix als quadratische Matrix gespeichert werden soll und alle Knoten die gleiche Anzahl von Unbekannten n_{dof} aufweisen (in unserem Beispiel ist $n_{\text{dof}}=2$), so ergibt sich für die Einspeicherung des Matrixelementes $k_{IJ}^{(e)}$, wobei $I,J=1,2,3$ und $i,j=1,2$ annehmen können, folgende Position (k,m) in der Gesamtmatrix \mathbf{K}

$$\mathbf{K}_{km} = \mathbf{K}_{km} + k_{IJ}^{(e)}$$

mit

$$k = (\mathbf{M}_{\text{topo}}(e, I) - 1) \cdot n_{\text{dof}} + i$$

$$m = (\mathbf{M}_{\text{topo}}(e, J) - 1) \cdot n_{\text{dof}} + j$$

Da die Matrix \mathbf{K} symmetrisch ist, brauchen nur die Elemente $m \geq k$ aufgebaut zu werden. Um Speicherplatz zu sparen, erfolgt die Speicherung von \mathbf{K} üblicherweise in einem speziellen Format. Ein einfache Variante eines solchen speziellen Formats stellt die folgende Rechteckmatrix dar:

$$\mathbf{K} = \begin{matrix} & & & & \text{ibw} \\ & & & & \left[\begin{array}{ccccc} k_{11} & k_{12} & \cdots & \cdots & k_{1\text{ibw}} \\ k_{22} & k_{23} & \cdots & \cdots & k_{2\text{ibw}} \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ k_{ii} & k_{i,i+1} & \cdots & \cdots & k_{i,\text{ibw}} \\ \vdots & \vdots & & & 0 \\ \vdots & \vdots & & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ k_{nn} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \\ & & & & \end{matrix},$$

bei der die Hauptdiagonale in der ersten Spalte steht. Mit *ibw* wird die sogenannte *Bandweite* der Matrix bezeichnet.³² Nur innerhalb der Bandweite sind in der Matrix Element ungleich Null vorhanden. Man spricht in solchen Fällen auch von *Bandmatrizen*. Die Bandweite berechnet sich folgendermaßen aus der Differenz der Knotennummern, wenn man voraussetzt, daß alle Knoten die gleiche Anzahl von Unbekannten n_{dof} aufweisen.

$$\text{ibw} = n_{\text{dof}} \cdot (\max_{(e)} d^{(e)} + 1) \quad (2.5-8)$$

$d^{(e)}$ bezeichnet die maximale Differenz der Knotennummern des Elementes (e).

Die Gesamtsteifigkeitsmatrix \mathbf{K} ist *positiv-semidefinit*. Sie wird nach Einarbeitung der Randbedingungen, die mindestens die Starrkörperbewegungen des Systems verhindern müssen, *positiv definit*.

Randbedingungen

Die Verschiebungsrandsbedingungen³³ lassen sich auf unterschiedliche Art und Weise in des Gesamtgleichungssystem einarbeiten. Wenn einzelne Verschiebungsfreiheitsgrade Null sein müssen, kann das durch Streichen der betreffenden Zeilen und Spalten geschehen. Als Konsequenz ist ein Umordnen der Matrix erforderlich, was bei der Größe der Gleichungssysteme mit einem erheblichen Rechenaufwand verbunden ist. Alternativ können die Randbedingungen auch mit Hilfe der *Penalty*-Methode oder mit der Methode der *Langrangeschen* Multiplikatoren berücksichtigt werden. Dabei ermöglicht es die *Penalty*-Methode, auch komplizierte Rand-, Zwangs- und allgemeine Koppelbedingungen relativ einfach im Gleichungssystem zu berücksichtigen,³⁴ ohne daß wie bei der Methode der *Lagrangeschen* Multiplikatoren das Gleichungssystem vergrößert wird. Diesem Vorteil steht der Nachteil gegenüber, daß die Randbedingungen nur näherungsweise und zwar in Abhängigkeit von der Größe der *Penalty*-Zahl erfüllt werden. Mit steigenden *Penalty*-Zahl werden die Randbedingungen immer besser erfüllt, in gleichem Maße steigt aber auch die Konditionszahl der Koeffizientenmatrix,

³² Manchmal spricht man auch von halber Bandweite, da ja genaugenommen die symmetrische linke Seite der Matrix auch noch vorhanden ist. Bei unsymmetrischen Matrizen kann man eine linke und rechte Bandweite angeben, die nicht gleich sein müssen.

³³ Auch als *wesentliche Randbedingungen* oder als *kinematische Randbedingungen* bezeichnet.

³⁴ Das ist der Hauptgrund, weshalb in COSAR alle Rand- und Zwangsbedingungen mit Hilfe der *Penalty*-Methode berücksichtigt werden.

die bei zu großer *Penalty*-Zahl singular werden kann.³⁵ Wir werden später nochmals auf diesen Punkt zurückkommen und verweisen hier auf die Ausführungen im Abschnitt 1.4.

Lösung des Gleichungssystems

Nach der Einarbeitung der Randbedingung kann das Gleichungssystem (2.5-5) gelöst werden, wobei dafür eine große Anzahl von Lösungsverfahren zur Verfügung steht.³⁶ Wegen der großen Anzahl von Gleichungen³⁷ und der dadurch bedingten hohen Rechenzeiten für die Lösung des Gleichungssystems kommt es bei der Anwendung direkter Lösungsverfahren vor allem darauf an, eine möglichst geringe Bandweite zu erreichen. Das kann durch eine interne Ummumerierung der Knoten erreicht werden. Dafür steht eine Vielzahl von Verfahren zur Verfügung, die aus einer schlechten Ausgangsnumerierung, die meist das Ergebnis automatischer Netzgenerierungssoftware ist, eine „brauchbare“ interne Neunumerierung erzeugen. Wenn man beachtet, daß sich die Rechenzeit bei einem direkten Lösungsverfahren aus

$$t_{\text{CPU}} = c \cdot n \cdot (\text{ibw})^2 \quad (2.5-9)$$

berechnen läßt, wobei c eine vom Computer abhängige Konstante ist und die Koeffizientenmatrix das Gleichungssystem das Format (n, ibw) hat (vergleiche die im Beispiel 2.5-1 angegebene Rechteckform für \mathbf{K}), wird deutlich, welche Bedeutung eine Reduktion der Bandweite für die Gleichungslösung hat.³⁸ Neben Verfahren, die auf zyklischen Tauschalgorithmen zur Reduktion der Bandweite basieren, haben sich vor allem graphentheoretische Verfahren als besonders effizient erwiesen.

Neben den direkten Lösungsverfahren kommen zunehmend auch iterative Verfahren zum Einsatz, wobei sich hier vor allem vorkonditionierte Gradientenverfahren (pcg-Verfahren) als besonders leistungsfähig erwiesen haben.

Spannungsberechnung

Nachdem das Gleichungssystem gelöst wurde, sind die Verschiebungen für jeden Knotenpunkt bekannt. Diese können in den Elementverschiebungsansatz eingesetzt werden, so daß die Verschiebungen auch innerhalb eines Elementes berechnet werden können. Damit lassen sich nun eine Vielzahl von sekundären Ergebnisgrößen berechnen. Die Spannungsberechnung kann beispielsweise mit Hilfe der Gleichung (2.4-4) erfolgen und man erhält

$$\mathbf{s}^{(e)} = \mathbf{E}^{(e)} \mathbf{B}^{(e)} \mathbf{v}^{(e)} - \mathbf{E}^{(e)} \bar{\mathbf{e}}_0^{(e)} \quad (2.5-10)$$

Dabei soll hier der hochgestellte Index (e) nochmals hervorheben, daß die Spannungen elementbezogene Größen sind. Während die Verschiebung über das ganze Lösungsgebiet mindestens stückweise stetige Funktionen sind, treten üblicherweise Sprünge in

³⁵ Empfehlung für die Wahl der Penalty-Zahl: $\mu = 10^p \cdot \min_{(i)} k_{ii}$, mit $p=4\dots6$.

³⁶ Siehe dazu die Vorlesung *Mathematische und Numerische Methoden der Mechanik - Teil II*.

³⁷ Bei der Lösung praktische Aufgabenstellungen sind mehrere Millionen Unbekannte keine Seltenheit. Siehe dazu beispielsweise die Angaben in den Diplomarbeiten, die im Abschnitt 1.1. zitiert wurden.

³⁸ Für das Programmsystem COSAR wurde beispielsweise ein schnelles graphentheoretisches Verfahren entwickelt und implementiert, das auf dem *Cuthill-McKee* Verfahren basiert.

den Spannungen zwischen benachbarten Elementen auf. Die Spannungen sind also in der Regel zwischen benachbarten Elementen nicht stetig. Die Größe der Spannungssprünge ist ein Maß für die Genauigkeit der Näherungslösung. Wir werden darauf im Abschnitt 7 noch genauer eingehen. Meist erfolgt programmintern eine einfache Mittelwertbildung der Spannungen an den Knoten, wobei in die Mittelwertbildung alle Knotenspannungen aus den angrenzenden Elementen eingehen. Dadurch wird dem Anwender des Programmes ein stetiger Verlauf der Spannungen vorgetäuscht, der eigentlich so nicht vorhanden ist. In vielen Fällen führt dieser Mittelungsprozeß allerdings zu geglätteten Spannungen, die genauer als die Einzelspannungen in den Elementen sind. Hier ist aber Vorsicht geboten, weil sich gerade dadurch teilweise auch völlig unbrauchbare oder unsinnige Ergebnisse ergeben können wie wir später noch sehen werden. Meist wird ein einfaches arithmetisches Mittel berechnet, das sich aus

$$\bar{\sigma}_{ij}^{(k)} = \frac{1}{m} \sum_{l=1}^m \sigma_{ij(l)}^{(k)} \quad (2.5-11)$$

berechnen läßt. Dabei bezeichnet (k) den Knoten, an dem die Mittelung erfolgt, $\sigma_{ij(l)}^{(k)}$ sind die Spannungen aus dem l -ten Element, das an den Knoten (k) angrenzt, und m ist die Gesamtanzahl der Elemente, die an den Knoten (k) angrenzen.

3. Simplex-Elemente

3.1. Das 2-Knoten Stabelement

Das 2-Knoten Stabelement wurde bereits im Abschnitt 1.4 als Einführungsbeispiel ausführlich behandelt. Hier dient das Element (vor allem aus didaktischen Gründen) dazu, die im Abschnitt 2 dargestellten allgemeinen Grundlagen an einem ersten, sehr einfachen Beispiel anzuwenden. Als neuen Aspekt wollen wir hier erstmals die Nutzung von dimensionslosen - sogenannten natürlichen Koordinaten - einführen, die sich für die Ableitung von finiten Elementen im weiteren als nützlich erweisen werden.

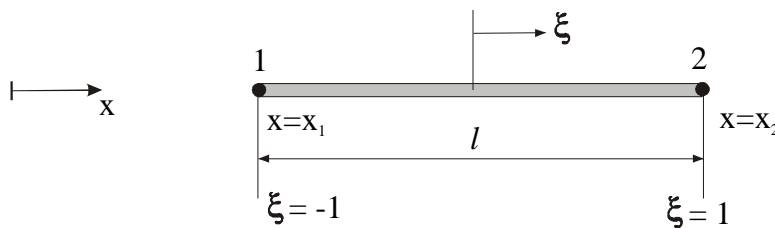


Bild 3.1-1: 2-Knoten Stabelement mit natürlichen Koordinaten

Im Bild 3.1-1 ist das Element abgebildet.¹ In dem natürlichen Koordinatensystem ξ hat das Element die Länge 2. Der Zusammenhang zwischen der natürlichen Koordinate ξ , deren Ursprung der Elementmittelpunkt liegt, und der x -Koordinate ergibt sich aus

$$x = x_0 + \frac{1}{2}l\xi \quad (3.1-1)$$

$$\frac{d}{dx} = \frac{d\xi}{dx} \frac{d}{d\xi} = \frac{2}{l} \frac{d}{d\xi} \quad (3.1-2)$$

In den natürlichen Koordinaten lassen sich die Formfunktionen $N_1(x)$ und $N_2(x)$ für das 2-Knotenlement folgendermaßen schreiben²

$$N_1 = \frac{1}{2}(1 - \xi) \quad (3.1-3a)$$

$$N_2 = \frac{1}{2}(1 + \xi) \quad (3.1-3b)$$

Die Matrix der Formfunktionen \mathbf{N} hat die Form

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(1 - \xi) & \frac{1}{2}(1 + \xi) \end{bmatrix} \quad (3.1-4)$$

Der Verschiebungsansatz kann daher folgendermaßen geschrieben werden:

$$\mathbf{u} = \mathbf{N}\mathbf{v} = \begin{bmatrix} N_1 & N_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(1 - \xi) & \frac{1}{2}(1 + \xi) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

¹ Der Index bezeichnet hier stets die Knotennummer.

² Vergleiche Abschnitt 1.4 Gleichung (1.4-11). Die Summe der Formfunktionen ergibt 1, wie es Gleichung (2.3-18) fordert, um Starkkörperverschiebungen korrekt zu erfassen.

Für die Berechnung der Elementsteifigkeitsmatrix brauchen wir noch die Matrix **B**. Für ein Stabelement ist der Zusammenhang zwischen Dehnungen und Verschiebungen gegeben durch

$$\varepsilon = \frac{du}{dx} = \mathbf{D}u = \mathbf{D}\mathbf{N}\mathbf{v} = \mathbf{B}\mathbf{v} \quad (3.1-5)$$

mit

$$\mathbf{B} = \left[\frac{d}{dx} \right] = \left[\frac{2}{l} \frac{d}{d\xi} \right] = \frac{1}{l} \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.1-6)$$

Die *Hookesche* Matrix besteht hier aus dem Elastizitätsmodul multipliziert mit der Stabfläche A, die sich durch die Reduktion des Volumenintegrals auf ein Linienintegral ergibt.

$$\mathbf{E} = [\mathbf{E}A] \quad (3.1-7)$$

Da wir die natürlichen Koordinaten auch für die Berechnung der Integrale benutzen wollen, müssen wir noch folgende Transformation beachten

$$\int_{x_1}^{x_2} \dots dx = \int_{-1}^1 \dots \frac{l}{2} d\xi \quad (3.1-8)$$

Jetzt können die Elementmatrizen berechnet werden, und wir erhalten:³

Elementsteifigkeitsmatrix

$$\begin{aligned} \mathbf{K} &= \int_{-1}^1 \mathbf{E}A\mathbf{B}^T \mathbf{B} \frac{l}{2} d\xi = \frac{\mathbf{E}A}{l} \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} d\xi \\ \mathbf{K} &= \frac{\mathbf{E}A}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.1-9)$$

Elementkraftvektoren

Volumenlasten infolge Eigengewicht in x-Richtung⁴

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_p &= \int_{-1}^1 \mathbf{A}\mathbf{N}^T \bar{\mathbf{p}} \frac{l}{2} d\xi = A\rho g \int_{-1}^1 \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1-\xi \\ 1+\xi \end{bmatrix} \frac{l}{2} d\xi \\ \mathbf{f}_p &= \frac{1}{2} A l \rho g \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.1-10)$$

Massenmatrix

$$\mathbf{M} = \int_{-1}^1 A\rho \mathbf{N}^T \mathbf{N} \frac{l}{2} d\xi$$

³ Dabei nehmen wir an, daß der Elastizitätsmodul und die Elementfläche elementweise konstant sind.

⁴ Hier ist $\bar{\mathbf{p}} = \rho g$.

$$\mathbf{M} = \frac{1}{2} A l \rho \int_{-1}^1 \frac{1}{2} \begin{bmatrix} (1-\xi) \\ (1+\xi) \end{bmatrix} \frac{1}{2} [(1-\xi) \quad (1+\xi)] d\xi$$

$$\mathbf{M} = \frac{1}{6} A l \rho \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (3.1-11)$$

Um Rechenzeit zu sparen und zu schnelleren numerischen Algorithmen zu gelangen, wird häufig mit diagonalisierten Massenmatrizen gearbeitet.⁵ Die einfachste Möglichkeit einer Diagonalisierung besteht darin, eine Zeilensummenbildung vorzunehmen.⁶ Diese führt hier zu

$$\mathbf{M} = \frac{1}{2} A l \rho \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.1-12)$$

Im Abschnitt 1.4 wurde bereits gezeigt wie man die auf ein lokales Stabsystem bezogenen Elementmatrizen und -vektoren auf ein globales Bezugssystem transformieren kann. Das soll daher hier nur noch einmal kurz rekapituliert werden.⁷

Stabelement im Raum

Wir bezeichnen jetzt zur Unterscheidung die auf das lokale Stabkoordinatensystem bezogenen Größen mit einem Querstrich. Für die Transformation der Verschiebungen zwischen dem lokalen und dem globalen Koordinatensystem gilt mit $c_{\bar{x}x} = \cos(\bar{x}, x)$

$$\bar{\mathbf{v}} = \begin{bmatrix} \bar{u}_1 \\ \bar{v}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{\bar{x}x} & c_{\bar{x}y} & c_{\bar{x}z} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{\bar{x}x} & c_{\bar{x}y} & c_{\bar{x}z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{bmatrix} = \mathbf{T} \mathbf{v} \quad (3.1-13)$$

Analog gilt für den Kraftvektor

$$\bar{\mathbf{f}} = \mathbf{T} \mathbf{f} \quad (3.1-14)$$

Einsetzen in die lokale Steifigkeitsbeziehung $\bar{\mathbf{K}} \bar{\mathbf{v}} = \bar{\mathbf{f}}$ führt zu

$$\bar{\mathbf{K}} \mathbf{T} \mathbf{v} = \bar{\mathbf{f}} \quad (3.1-15)$$

Durch Linksmultiplikation mit \mathbf{T}^T folgt daraus

$$\mathbf{T}^T \bar{\mathbf{K}} \mathbf{T} \mathbf{v} = \mathbf{T}^T \bar{\mathbf{f}}$$

⁵ Eine solche diagonalisierte Matrix wird im Englischen als *lumped matrix* bezeichnet.

⁶ Durch die Zeilensummenbildung werden die Gesamtmasse des Elementes und auch seine Trägheitseigenschaften nicht verändert. Allerdings kann die Zeilensummenbildung zu negativen Hauptdiagonalelementen führen, was bei der Anwendung bestimmter numerischer Verfahren von Nachteil ist. In diesem Fall muß entweder das numerische Verfahren modifiziert werden oder die Diagonalisierung muß so erfolgen, daß eine positiv definite Diagonalmatrix entsteht.

⁷ Die Ableitung der Elemente in einem lokalen Koordinatensystem und anschließende Transformation auf ein allgemeines Bezugssystem ist eine übliche Herangehensweise bei der Ableitung von finiten Elementen.

$$\mathbf{K}\mathbf{v} = \mathbf{f}$$

mit

$$\mathbf{K} = \mathbf{T}^T \bar{\mathbf{K}} \mathbf{T} \quad (3.1-16)$$

$$\mathbf{f} = \mathbf{T}^T \bar{\mathbf{f}} \quad (3.1-17)$$

Die Steifigkeitsmatrix \mathbf{K} ergibt sich aus (3.1-15) durch Ausmultiplizieren.

$$\mathbf{K} = \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} c_{\bar{x}x}^2 & c_{\bar{x}x} c_{\bar{x}y} & c_{\bar{x}x} c_{\bar{x}z} & -c_{\bar{x}x}^2 & -c_{\bar{x}x} c_{\bar{x}y} & -c_{\bar{x}x} c_{\bar{x}z} \\ & c_{\bar{x}y}^2 & c_{\bar{x}y} c_{\bar{x}z} & -c_{\bar{x}x} c_{\bar{x}y} & -c_{\bar{x}y}^2 & -c_{\bar{x}y} c_{\bar{x}z} \\ & & c_{\bar{x}z}^2 & -c_{\bar{x}x} c_{\bar{x}z} & -c_{\bar{x}y} c_{\bar{x}z} & -c_{\bar{x}z}^2 \\ & & & c_{\bar{x}x}^2 & c_{\bar{x}x} c_{\bar{x}y} & c_{\bar{x}x} c_{\bar{x}z} \\ \text{symm.} & & & & c_{\bar{x}y}^2 & c_{\bar{x}y} c_{\bar{x}z} \\ & & & & & c_{\bar{x}z}^2 \end{bmatrix} \quad (3.1-18)$$

Nachdem die Verschiebungen im Gesamtsystem berechnet wurden, erfolgt die Rücktransformation mit (3.1-13). Damit können die Stabkräfte und Spannungen wieder im lokalen Koordinatensystem berechnet werden.

3.2. Das 2-Knoten Balkenelement (*Bernoulli-Balken*)

Während das 2-Knoten Stabelement das einfachste C_0 -stetige finite Element ist, das stellvertretend für 2D- und 3D-Elemente steht, ist das 2-Knoten Balkenelement das einfachste C_1 -stetige finite Element, das stellvertretend für Platten und Schalenelement steht. Wir wollen hier zunächst nur ein ebenes Element mit gerader Stabachse bei kleinen Verformungen betrachten, so daß die Biegedeformationen des Balkens unabhängig von der Längsdeformation sind.⁸ Die Längsverformungen haben wir ja gerade im Abschnitt 3.1 behandelt. Dieser Anteil kann bei kleinen Verformungen einfach additiv der Steifigkeitsbeziehung des Biegeanteils hinzugefügt werden, um ein komplettes ebenes Balkenelement zu erhalten.⁹ Die nachfolgende Ableitung des Balkenelementes setzt voraus, daß die Deformation des Balkens infolge Querkraftschub vernachlässigt werden kann, was bei schlanken Balkentragwerken stets zulässig ist.¹⁰ Derartige Balken werden auch als *Bernoulli-Balken* bezeichnet.¹¹ Das Deformationsverhalten eines Balkenelementes mit 2-Knoten ist in Bild 3.2-1 abgebildet.

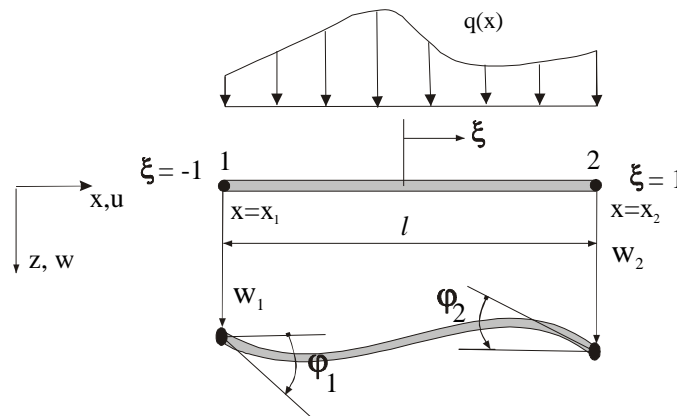


Bild 3.2-1: 2-Knoten Balkenelement in der x-z Ebene

Das Elastische Potential für ein gerades Balkenelement lautet¹²

$$\pi = \frac{1}{2} \int_0^l EI (w'')^2 dx - \int_0^l w \bar{q} dx - \sum_{(k)} \bar{F}_k w_k - \sum_{(k)} \bar{M}_k \phi_k \quad (3.2-1)$$

Das entspricht der Gleichung (2.3-1) wenn man für die Dehnung $\mathbf{e} = \epsilon_x$ und für die Spannung $\mathbf{s} = \sigma_x$ einsetzt.¹³ Es gilt

⁸ Bei gekrümmter Stabachse sind in den Differentialgleichungen Längskräfte und Momente miteinander verknüpft (Längskräfte rufen beispielsweise Biegemomente hervor) und können daher nicht unabhängig voneinander betrachtet werden. Man kann natürlich einen gekrümmten Balken auch durch stückweise gerade Balkenelemente approximieren und auf diesem Weg eine brauchbare Näherungslösung erhalten.

⁹ Analog kann die Steifigkeitsbeziehung für den 2D-Fall auf das komplette 3D-Balkenelement erweitert werden. Dazu sind zusätzlich der Torsionsanteil erforderlich, der analog zum Stabelement aufgebaut ist, sowie der Biegeanteil in der anderen Balkenebene, der analog zu dem hier behandelten Biegeanteil aufgebaut ist. Es entsteht auf diese Weise ein 3D-Balkenelement mit gerader Stabachse, das 12 Unbekannte (Freiheitsgrade) aufweist.

¹⁰ Ein Kriterium dafür ist das Verhältnis der Querschnittsabmessung (mit H bezeichnet) zur Gesamtlänge des Balkens (mit L bezeichnet). Der Querkraftschub kann bei $\frac{L}{H} \geq 20$ meist vernachlässigt werden.

¹¹ Im Unterschied zum *Timoshenko-Balken*, bei dem der Querkraftschub näherungsweise berücksichtigt wird.

¹² Siehe Vorlesung *Mathematische und Numerische Methoden der Mechanik - Teil I*

¹³ Der Balken wird hier nur in der x-z Ebene betrachtet. In die Energieformulierung geht entsprechend der *Bernoulli-Hypothese* nur die Biegeformänderungsarbeit ein.

$$\varepsilon_x = -z \frac{d^2 w}{dx^2} = -z D w \quad (3.2-2)$$

$$\sigma_x = E \varepsilon_x = -z E D w \quad (3.2-3)$$

mit

$$D = \frac{d^2}{dx^2} = \frac{4}{l^2} \frac{d^2}{d\xi^2} \quad (3.2-4)$$

Setzt man (3.2-2) und (3.2-3) in die Formel für das *Elastische Potential* (2.3-1) ein, erhält man

$$\begin{aligned} \pi &= \frac{1}{2} \int_V \varepsilon_x \sigma_x dV + \dots = \frac{1}{2} \int_V z^2 E (Dw)^2 dV + \dots = \frac{1}{2} \int_l \left(\int_A z^2 dA \right) E (Dw)^2 D dx + \dots \\ &= \frac{1}{2} \int_l EI (Dw)^2 dx + \dots, \end{aligned}$$

wobei $I = \int_A z^2 dA$ das Flächenträgheitsmoment ist. Man erkennt, das sich aus der allgemeinen Formel (2.3-1) der Spezialfall der Balkenbiegung (3.2-1) ableiten läßt.

Formfunktionen

In dem *Elastischen Potential* steht die zweite Ableitung der Durchbiegung, so daß das zu entwickelnde finite Element offensichtlich C_1 stetig sein muß, d.h. an den beiden Knotenpunkten müssen die Durchbiegung w als auch der Biegewinkel φ zwischen benachbarten Elementen stetig sein.¹⁴ Damit ergeben sich insgesamt 4 Unbekannte ($w_1, \varphi_1, w_2, \varphi_2$), so daß für die Approximation der Durchbiegung ein kubischer Polynomansatz erforderlich ist. Dieser lautet

$$w(\xi) = a_1 + a_2 \xi + a_3 \xi^2 + a_4 \xi^3 = \mathbf{P}(\xi) \mathbf{a} \quad (3.2-5)$$

Für den Biegewinkel ergibt sich daraus

$$\varphi(\xi) = w' = \frac{dw}{dx} = \frac{2}{l} \frac{dw}{d\xi} = \frac{2}{l} (a_2 + 2a_3 \xi + 3a_4 \xi^2) \quad (3.2-6)$$

Wir schreiben jetzt den Ansatz (3.2-5) und (3.2-6) an den beiden Knoten 1 und 2 des Elementes an und erhalten

$$\begin{bmatrix} w_1 \\ \frac{1}{2} l \varphi_1 \\ w_2 \\ \frac{1}{2} l \varphi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{bmatrix} = \mathbf{A} \mathbf{a} \quad (3.2-7)$$

Die Inversion der Matrix \mathbf{A} liefert

¹⁴ Falls dort nicht ein Gelenk oder eine andere spezielle Verbindung vorliegt.

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 0,5 & 0,25 & 0,5 & -0,25 \\ -0,75 & -0,25 & 0,75 & -0,25 \\ 0 & -0,25 & 0 & 0,25 \\ 0,25 & 0,25 & -0,25 & 0,25 \end{bmatrix} \quad (3.2-8)$$

Führt man jetzt noch den Vektor \mathbf{v} der Unbekannten des Elementes mit

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} w_1 \\ \varphi_1 \\ w_2 \\ \varphi_2 \end{bmatrix} \quad (3.2-9)$$

ein und bildet entsprechend Gleichung (2.3-13) die Matrix $\mathbf{G} = \mathbf{P}(\xi)\mathbf{A}^{-1}$, so erhält man für den Verschiebungsansatz

$$w(\xi) = \mathbf{P}(\xi)\mathbf{A}^{-1}\mathbf{v} = \mathbf{N}(\xi)\mathbf{v} = \begin{bmatrix} N_1 & N_2 & N_3 & N_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ \varphi_1 \\ w_2 \\ \varphi_2 \end{bmatrix} \quad (3.2-10)$$

mit

$$N_1 = \frac{1}{4}(1-\xi)^2(2+\xi) \quad (3.2-11a)$$

$$N_2 = \frac{1}{8}l(1-\xi^2)(1-\xi) \quad (3.2-11b)$$

$$N_3 = \frac{1}{4}(1+\xi)^2(2-\xi) \quad (3.2-11c)$$

$$N_4 = -\frac{1}{8}l(1-\xi^2)(1+\xi) \quad (3.2-11d)$$

Die Formfunktionen sind im Bild 3.2-2 grafisch dargestellt.

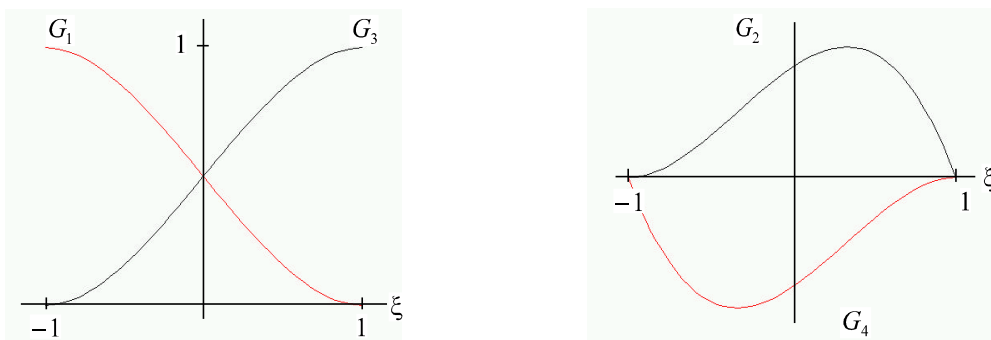


Bild 3.2-2: Grafische Darstellung der Formfunktionen für das 2-Knoten Balkenelement

Elementsteifigkeitsmatrix

Für die Berechnung der Elementsteifigkeitsmatrix werden die zweiten Ableitungen der Formfunktionen nach der x-Koordinate benötigt.

$$\mathbf{B}(\xi) = \mathbf{D}\mathbf{N}(\xi) = \frac{d^2}{dx^2} \mathbf{N}(\xi) = \frac{4}{l^2} \frac{d^2}{d\xi^2} \mathbf{N}(\xi) = [\mathbf{B}_1 \quad \mathbf{B}_2 \quad \mathbf{B}_3 \quad \mathbf{B}_4] \quad (3.2-12)$$

Daraus ergibt sich

$$\mathbf{B}_1(\xi) = \frac{6}{l^2} \xi \quad (3.2-13a)$$

$$\mathbf{B}_2(\xi) = \frac{1}{l} (-1 + 3\xi) \quad (3.2-13b)$$

$$\mathbf{B}_3(\xi) = -\frac{6}{l^2} \xi \quad (3.2-13c)$$

$$\mathbf{B}_4(\xi) = \frac{1}{l} (1 + 3\xi) \quad (3.2-13d)$$

Die Elementsteifigkeitsmatrix kann dann folgendermaßen berechnet werden

$$\mathbf{K} = \int_{-1}^1 \mathbf{E}\mathbf{I}\mathbf{B}^T \mathbf{B} \frac{l}{2} d\xi \quad (3.2-14)$$

Für konstantes EI erhält man daraus¹⁵

$$\mathbf{K} = \frac{\mathbf{E}\mathbf{I}}{l^3} \begin{bmatrix} 12 & 6l & -12 & 6l \\ & 4l^2 & -6l & 2l^2 \\ & & 12 & -6l \\ \text{symm.} & & & 4l^2 \end{bmatrix} \quad (3.2-15)$$

Kraftvektor

Wir wollen hier nur den Kraftvektor infolge einer linear veränderlichen Linienlast angeben. Der Elementkraftvektor hat die Form

$$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} F_1 \\ M_1 \\ F_2 \\ M_2 \end{bmatrix} \quad (3.2-16)$$

¹⁵ Für einen Balken mit linear veränderlichem Trägheitsmoment (I_1 am Knoten 1 und I_2 am Knoten 2) ergibt sich

$$\mathbf{K} = \frac{\mathbf{E}I_1}{l^3} \begin{bmatrix} 6(1+\alpha) & 2l(2+\alpha) & -6(1+\alpha) & 2l((1+2\alpha)) \\ & l^2(3+\alpha) & -2l(2+\alpha) & l^2(1+\alpha) \\ & & 6(1+\alpha) & -2l(1+2\alpha) \\ \text{symm.} & & & l^2(1+3\alpha) \end{bmatrix} \text{ mit } \alpha = \frac{I_1}{I_2}$$

Für eine linear veränderliche Linienlast mit der Intensität \bar{q}_1 am Knoten 1 und \bar{q}_2 am Knoten 2, wird der Verlauf der Funktion $\bar{q}(\xi)$ längs der Balkenachse durch

$$\bar{q}(\xi) = \frac{\bar{q}_2 - \bar{q}_1}{2} \xi + \frac{\bar{q}_2 + \bar{q}_1}{2} \quad (3.2-17)$$

beschrieben. Der äquivalente Knotenkraftvektor berechnet sich nach Gleichung (2.4-9) folgendermaßen:

$$\mathbf{f}_q = \int_{-1}^1 \mathbf{N}(\xi)^T \bar{q}(\xi) \frac{l}{2} d\xi \quad (3.2-18)$$

$$\mathbf{f}_q = \begin{bmatrix} \frac{l}{20} (7\bar{q}_1 + 3\bar{q}_2) \\ \frac{l^2}{60} (3\bar{q}_1 + 2\bar{q}_2) \\ \frac{l}{20} (3\bar{q}_1 + 7\bar{q}_2) \\ -\frac{l^2}{60} (2\bar{q}_1 + 3\bar{q}_2) \end{bmatrix} \quad (3.2-19)$$

Für $\bar{q}_1 = \bar{q}_2 = \bar{q}$ ergibt sich

$$\mathbf{f}_q = \bar{q} l \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{l}{12} \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{l}{12} \end{bmatrix} \quad (3.2-20)$$

Man erkennt, daß sich in diesem Fall auch Momente im Kraftvektor ergeben, obwohl nur eine Linienlast wirkt.¹⁶

Massenmatrix

Die Massenmatrix berechnet sich nach Gleichung (2.4-19) zu

$$\mathbf{M} = \int_{-1}^1 \rho A \mathbf{G}(\xi)^T \mathbf{G}(\xi) \frac{l}{2} d\xi \quad (3.2-21)$$

$$\mathbf{M} = \frac{\rho A l}{420} \begin{bmatrix} 156 & 22l & 54 & -13l \\ & 4l^2 & 13l & -3l^2 \\ & & 156 & -22l \\ \text{symm} & & & 4l^2 \end{bmatrix} \quad (3.2-22)$$

¹⁶ Die äquivalenten Knotenkräfte und Momente entsprechen den Lagerreaktionen des beidseitig eingespannten und durch eine Linienlast belasteten Elementes.

Stabknickung als Beispiel für ein Stabilitätsproblem

Wir wollen nachfolgend noch kurz auf die Berechnung von Knickkräften unter Verwendung des oben angegebenen Balkenelementes eingehen. Bei Knickproblemen nach Theorie 2-ter Ordnung müssen wir den Einfluß der Verformung auf das Gleichgewicht berücksichtigen, können aber noch die für kleine Verformungen abgeleitete Differentialgleichung der Balkenbiegung verwenden. Diese lautet¹⁷

$$\pi = \frac{1}{2} \int_{(I)} EI(w'')^2 dx + \frac{1}{2} \int_{(I)} F_N (w')^2 dx. \rightarrow \text{Min.} \quad (3.2-23)$$

Mit F_N ist hier die Schnittkraft in Stablängsrichtung bezeichnet. Setzen wir in Gleichung (3.2-23) den Näherungsansatz (3.2-10) ein, erhalten wir

$$\pi = \frac{1}{2} \mathbf{v}^T \mathbf{K} \mathbf{v} + \frac{1}{2} \mathbf{v}^T \mathbf{K}_\sigma \mathbf{v} \rightarrow \text{Min.} \quad (3.2-24)$$

mit

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_\sigma &= \int_{(I)} F_N \mathbf{L}^T \mathbf{L} dx \\ &= \int_{-1}^1 F_N \mathbf{L}^T \mathbf{L} \frac{l}{2} d\xi \end{aligned} \quad (3.2-25)$$

und

$$\mathbf{L}(\xi) = \frac{d}{dx} \mathbf{N}(\xi) = \frac{2}{l} \frac{d}{d\xi} \mathbf{N}(\xi) = [\mathbf{L}_1 \quad \mathbf{L}_2 \quad \mathbf{L}_3 \quad \mathbf{L}_4] \quad (3.2-26)$$

mit

$$\mathbf{L}_1(\xi) = \frac{1}{2l} (-3 + 3\xi^2) \quad (3.2-27a)$$

$$\mathbf{L}_2(\xi) = \frac{1}{4} (-1 - 2\xi + 3\xi^2) \quad (3.2-27b)$$

$$\mathbf{L}_3(\xi) = \frac{1}{2l} (3 - 3\xi^2) \quad (3.2-27c)$$

$$\mathbf{L}_4(\xi) = -\frac{1}{4} (1 - 2\xi - 3\xi^2) \quad (3.2-27d)$$

Die Matrix \mathbf{K}_σ wird auch als geometrische Steifigkeitsmatrix bezeichnet, weil sie den Einfluß der verformten Geometrie auf die Biegespannungen berücksichtigt. Für den Fall, daß F_N elementweise konstant ist, ergibt sich mit $F_N = \bar{F}$ aus (3.2-25)

$$\mathbf{K}_\sigma = \frac{\bar{F}}{30l} \begin{bmatrix} 36 & 3l & -36 & 3l \\ & 4l^2 & -3l & -l^2 \\ & & 36 & -3l \\ \text{symm.} & & & 4l^2 \end{bmatrix} \quad (3.2-28)$$

¹⁷ Die erste Variation $\delta\pi=0$ liefert als *Eulersche Gleichung* $(EIw'')'' - F_N w'' = 0$, die wir bereits als Differentialgleichung für Knickstäbe kennengelernt haben (siehe MNMM-Teil I)

Die Minimierung von π (3.2-24) bezüglich der eingeführten Unbekannten des Näherungsansatzes führt zu

$$\frac{\partial \pi}{\partial \mathbf{v}} = \mathbf{K}\mathbf{v} + \mathbf{K}_\sigma \mathbf{v} = \mathbf{0}. \quad (3.2-29)$$

Für positive Längskräfte liefert (3.2-29) nur die triviale Lösung $\mathbf{v}=\mathbf{0}$. Falls F_N auch negativ sein kann, schreiben wir

$$F_N = -\lambda \bar{F}, \quad (3.2-30)$$

wobei \bar{F} eine bekannte Bezugskraft (Einheitskraft) ist. Den Eigenwert λ kann man vor \mathbf{K}_σ schreiben, und man erhält das Eigenwertproblem

$$(\mathbf{K} - \lambda \mathbf{K}_\sigma) \mathbf{v} = \mathbf{0}, \quad (3.2-31)$$

Für ein Element mit konstanter Längskraft lautet das Eigenwertproblem:¹⁸

$$\left(\frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} 12 & 6l & -12 & 6l \\ & 4l^2 & -6l & 2l^2 \\ & & 12 & -6l \\ \text{symm.} & & & 4l^2 \end{bmatrix} - \lambda \frac{\bar{F}}{30l} \begin{bmatrix} 36 & 3l & -36 & 3l \\ & 4l^2 & -3l & -l^2 \\ & & 36 & -3l \\ \text{symm.} & & & 4l^2 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} w_1 \\ \varphi_1 \\ w_2 \\ \varphi_2 \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad (3.2-32)$$

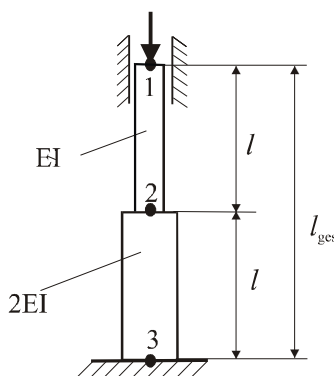
Elastisch gebetteter Balken

Wenn der Balken auf einer elastischen Unterlage liegt, für die wir die Gültigkeit der Winklerschen Hypothese annehmen können,¹⁹ erhalten wir den Einfluß der Bettungsreaktion, wenn wir zusätzlich in Gleichung (3.2-1) den Lastterm $\bar{q} = \bar{q} + \bar{q}_\beta$ mit

$$q_\beta(x) = -\beta w(x) \quad (3.2-33)$$

ergänzen. Damit ergibt sich im *Elastischen Potential* der folgende Zusatzterm

¹⁸ *Beispiel:* Berechnung der kritischen Knickkraft für das im Bild skizzierte System.



Die Randbedingungen lauten: $w_3 = 0$, $\varphi_3 = 0$, $w_1 = 0$, $\varphi_1 = 0$. Mit diesen Randbedingungen ergibt sich für eine Diskretisierung mit zwei finiten Elementen unter Benutzung der Gleichung (3.2-32) das folgende Eigenwertproblem:

$$\left(\begin{bmatrix} 12 + 2 \cdot 12 & -6l + 2 \cdot 6l \\ -6l + 2 \cdot 6l & 4l^2 + 2 \cdot 4l^2 \end{bmatrix} - \lambda^* \begin{bmatrix} 36 + 36 & -3l + 3l \\ -3l + 3l & 4l^2 + 4l^2 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} w_2 \\ \varphi_2 \end{bmatrix} = 0$$

mit $\lambda^* = \lambda \frac{\bar{F} l^2}{30EI}$ und $\bar{F} = 1$ ergibt sich daraus $\lambda^{*2} - 2\lambda^* + \frac{11}{16} = 0$; die Lösungen lauten: $\lambda_1^* = 0,440983$ und $\lambda_2^* = 1,559017$. Der kleinste Einwert ergibt

die kritische Kraft $F_1 = \lambda \bar{F} = \frac{30EI}{l^2} \lambda_1^* = 13,229 \frac{EI}{l^2} = 52,918 \frac{EI}{l_{ges}^2}$.

¹⁹ Die Hypothese von WINKLER besagt, daß die Bettungsreaktion proportional mit der Einsenkung in das Bettungsmaterial zunimmt, d.h. es gilt $q(x) = -\beta w(x)$, wenn β die Proportionalitätskonstante bezeichnet, die aus Experimenten bestimmt werden muß.

$$\pi = \frac{1}{2} \int_0^1 EI (w'')^2 dx + \dots \underbrace{\frac{1}{2} \int_0^1 \beta w^2 dx}_{\text{Bettungsterm}} - \dots \rightarrow \text{Min.} \quad (3.2-34)$$

Setzt man in (3.2-34) den Verschiebungsansatz ein, ergibt sich

$$\pi = \frac{1}{2} \mathbf{v}^T \mathbf{K} \mathbf{v} + \frac{1}{2} \mathbf{v} \mathbf{K}_\beta \mathbf{v} - \mathbf{v}^T \mathbf{f} \quad (3.2-35)$$

mit

$$\mathbf{K}_\beta = \int_{(i)} \beta \mathbf{N}^T \mathbf{N} dx \quad (3.2-36)$$

Die Minimierung von π bezüglich der Unbekannten \mathbf{v} ergibt

$$(\mathbf{K} + \mathbf{K}_\beta) \mathbf{v} = \mathbf{f}. \quad (3.2-37)$$

Natürlich ist die Bettungsmatrix nur für diejenigen Elemente aufzubauen, die auf einem Bettungsmaterial aufliegen. An Hand der Formel (3.2-36) erkennt man, daß die Bettungsmatrix offenbar den gleichen Aufbau wie die Massenmatrix hat, wobei man in der Massenmatrix lediglich statt der Dichte die Bettungskonstante einsetzen muß.

3.3. Das 2-Knoten Rotationsscheibenelement

Eine Reihe weiterer Probleme lassen sich mit 1D-Modellen lösen. Dazu gehören beispielsweise rotationssymmetrische dünne

- Scheiben
- Platten
- Zylinderschalen.

Allerdings muß stets vorausgesetzt werden, daß sowohl die Geometrie, als auch die Belastungen und Randbedingungen rotationssymmetrisch sind. Anderenfalls kann unter bestimmten Voraussetzungen mittels einer *Fourier*-Reihenentwicklung eine Zurückführung auf die Lösung einer Anzahl quasi-eindimensionaler Probleme (semi-analytische Methode) erfolgen.²⁰

Nachfolgend betrachten wir zunächst rotationssymmetrische dünne Scheiben (siehe Bild 3.3-1), die dadurch charakterisiert sind, daß sowohl die Geometrie als auch die Lagerungen und Belastungen und Materialeigenschaften rotationssymmetrisch in Umfangsrichtung und konstant in Dickenrichtung sind, wobei angenommen wird, daß die Dicke klein ist gegenüber dem Außenradius.²¹ Die Mittelfläche muß natürlich eben sein. Diese Voraussetzungen führen dazu, daß die Spannungen und Verformungen unabhängig von der Umfangsrichtung sind und nur vom Radius r abhängen. Derartige Tragwerke können damit als quasi eindimensionale Modelle behandelt werden, deren Verformungs- und Spannungszustand durch die Verschiebung $u(r)$ vollständig beschrieben ist.

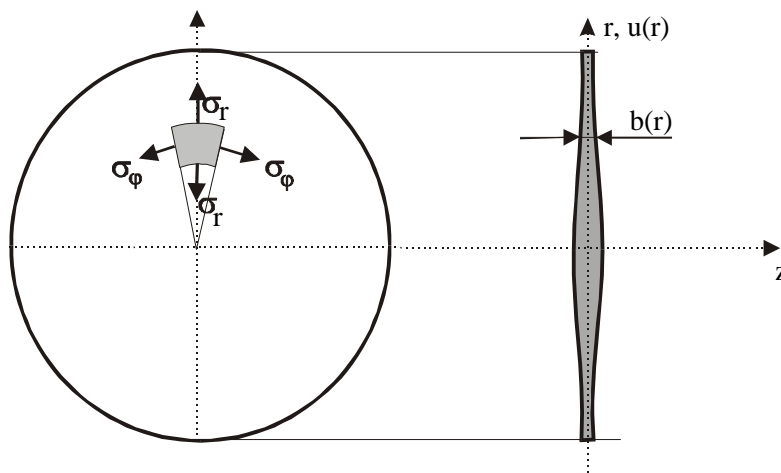


Bild 3.3-1 Rotationssymmetrische dünne Scheibe

Der Zusammenhang zwischen der Radialverschiebung $u(r)$ und den Dehnungen ergibt sich aus

$$\mathbf{e} = \begin{bmatrix} \varepsilon_r \\ \varepsilon_\varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{du}{dr} \\ \frac{u}{r} \end{bmatrix} = \mathbf{D}u(r) = \begin{bmatrix} \frac{d}{dr} \\ \frac{1}{r} \end{bmatrix} u(r) \quad (3.3-1)$$

²⁰ Vergleiche dazu auch die Vorlesung *Flächentragwerke*.

²¹ Ein typischer Anwendungsfall dafür sind beispielsweise Verdichterlaufräder in Turbinen.

mit

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \frac{d}{dr} \\ \frac{1}{r} \end{bmatrix} \quad (3.3-2)$$

Der ebenfalls zweidimensionale Spannungszustand berechnet sich über das *Hookesche* Gesetz aus den Dehnungen. Für isotropes Material gilt

$$\mathbf{s} = \mathbf{E}\mathbf{e} = \begin{bmatrix} \sigma_r \\ \sigma_\varphi \end{bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu \\ \nu & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_r \\ \varepsilon_\varphi \end{bmatrix} \quad (3.3-3)$$

Durch Einsetzen von (3.3-1) und (3.3-3) wird das *Elastische Potential* (2.3-1) durch die Verschiebungen $u(r)$ ausgedrückt. Man erkennt, daß in Gleichung (2.3-1) nur erste Ableitungen der Radialverschiebungen eingehen, so daß die finiten Elemente nur C_0 -

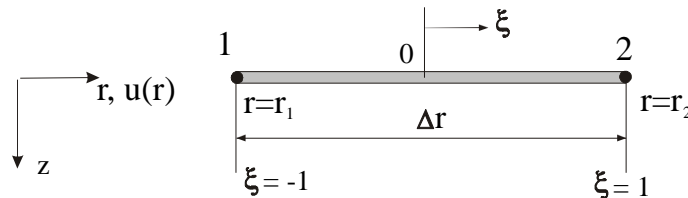


Bild 3.3-2. Finites Kreisringelement mit zwei Knotenkreisen

stetig sein müssen. Das leistet bereits ein linearer Ansatz für $u(r)$, für den wir analog zum 2-Knoten Stabelement erhalten

$$\mathbf{u}(\xi) = \mathbf{N}(\xi)\mathbf{v} = \begin{bmatrix} N_1(\xi) & N_2(\xi) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \quad (3.3-4)$$

mit

$$N_1 = \frac{1}{2}(1-\xi), \quad N_2 = \frac{1}{2}(1+\xi) \quad (3.3-5)$$

Für den Zusammenhang zwischen r und der lokalen Koordinate ξ gilt

$$r(\xi) = \frac{1}{2}\Delta r\xi + r_0 \quad (3.3-6)$$

$$\xi(r) = \frac{2}{\Delta r}r - \frac{2}{\Delta r}r_0 \quad (3.3-7)$$

Damit ergibt sich für \mathbf{D}

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \frac{2}{\Delta r} \frac{d}{d\xi} \\ \frac{2}{\Delta r\xi + 2r_m} \end{bmatrix} \quad (3.3-8)$$

Anwenden von \mathbf{D} auf die Matrix der Formfunktionen \mathbf{N} liefert

$$\mathbf{B} = \mathbf{D}\mathbf{N} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\Delta r} & \frac{1}{\Delta r} \\ \frac{1-\xi}{\Delta r\xi + 2r_0} & \frac{1+\xi}{\Delta r\xi + 2r_0} \end{bmatrix} \quad (3.3-9)$$

Jetzt kann entsprechend Gleichung (2.4-5) die Steifigkeitsmatrix berechnet werden. Für die Berechnung der Volumenintegrals ist zu beachten, daß wir hier über den Radius, den Kreisumfang und die Dicke integrieren müssen. Für das Volumenintegral erhalten wir demzufolge

$$\int_V \dots dV = 2\pi \int_{r_1}^{r_2} \dots b(r)r dr = 2\pi \int_{-1}^1 \dots b(\xi) \left(\frac{1}{2} \Delta r \xi + r_0 \right) \frac{\Delta r}{2} d\xi \quad (3.3-10)$$

Für \mathbf{K} ergibt sich aus (2.4-5) mit (3.3-10) und einer konstante Elementdicke b

$$\mathbf{K} = \pi \Delta r b \int_{-1}^1 \mathbf{B}(\xi)^T \mathbf{E} \mathbf{B}(\xi) \left(\frac{1}{2} \Delta r \xi + r_m \right) d\xi \quad (3.3-11)$$

$$\mathbf{K} = \frac{2\pi E b}{(1-\nu^2)\Delta r^2} \begin{bmatrix} r_2^2 \ln \frac{r_2}{r_1} - (1+\nu)\Delta r^2 & -r_1 r_2 \ln \frac{r_2}{r_1} \\ \text{symm.} & r_1^2 \ln \frac{r_2}{r_1} + (1+\nu)\Delta r^2 \end{bmatrix} \quad (3.3-12)$$

Für die Knotenkräfte infolge einer Rotation um die z -Achse mit der Winkelgeschwindigkeit ω ergibt sich²²

$$\mathbf{f}_p = \int_{(V)} \mathbf{G}^T \rho r \omega^2 dV = \rho \omega^2 b 2\pi \int_{-1}^1 \mathbf{G}(\xi)^T \left(\frac{1}{2} \Delta r \xi + r_m \right)^2 \frac{1}{2} \Delta r d\xi \quad (3.3-13)$$

$$\mathbf{f}_p = \frac{2\pi \rho \omega^2 b}{\Delta r} \begin{bmatrix} \frac{1}{4} r_1^4 - \frac{1}{3} r_1^3 r_2 + \frac{1}{12} r_2^4 \\ \frac{1}{4} r_2^4 - \frac{1}{3} r_1 r_2^3 + \frac{1}{12} r_1^4 \end{bmatrix} \quad (3.3-14)$$

²² Der Volumenlastvektor ergibt sich in diesem Fall zu $\bar{\mathbf{p}} = \rho r \omega^2$.

3.4. Das 2-Knoten Rotationsplattenelement

Von rotationssymmetrischen dünnen Platten sprechen wir, wenn im Unterschied zum Abschnitt 3.3 die Belastung ausschließlich senkrecht zur Plattenmittelfläche erfolgt. Es gelten dann die Bild 3.4-1 angegebenen Spannungsdefinitionen.

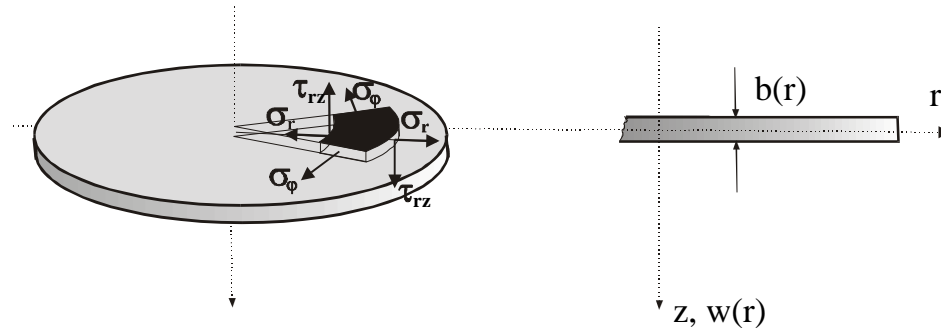


Bild 3.4-1 Rotationssymmetrische dünne Platte

Nach der *Kirchhoffschen* Plattentheorie²³ ergeben sich die Dehnungen in radialer und tangentialer Richtung zu

$$\mathbf{e} = \begin{bmatrix} \varepsilon_r \\ \varepsilon_\varphi \end{bmatrix} = -z \begin{bmatrix} \frac{d^2 w}{dr^2} \\ \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} \end{bmatrix} = -z \mathbf{D} w(r) \quad (3.4-1)$$

mit

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \frac{d^2}{dr^2} \\ \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \end{bmatrix} \quad (3.4-2)$$

Die Spannungen lassen sich mit der *Hookeschen* Matrix durch die Dehnungen ausdrücken. Für isotropes Material gilt

$$\mathbf{s} = \begin{bmatrix} \sigma_r \\ \sigma_\varphi \end{bmatrix} = \mathbf{E} \mathbf{e} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu \\ \nu & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_r \\ \varepsilon_\varphi \end{bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \mathbf{H} \mathbf{e} \quad (3.4-3)$$

mit

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 1 & \nu \\ \nu & 1 \end{bmatrix} \quad (3.4-4)$$

Die Matrix \mathbf{H} wurde eingeführt, um eine Analogie zu der in der Plattentheorie üblichen Schreibweisen zu erzielen. Damit kann der Ausdruck (2.3-1) für das *Elastische Potential* benutzt werden.

²³ Die wesentlichste Annahme der *Kirchhoffschen* Plattentheorie ist, daß eine Normale zur Plattenmittelfläche auch nach der Verformung normal auf der Mittelfläche steht. Schubspannungen τ_{rz} infolge von Querkräften haben damit keinen Einfluß auf die Verformungen, was (analog zum *Bernoulli*-Balken) nur bei dünnen Kreisplatten, mit einer Dicke klein im Verhältnis zum Radius, in guter Näherung erfüllt ist. Kleine Verformungen und lineares Materialverhalten werden hier generell vorausgesetzt. Die Berücksichtigung von Querkraftschubeinflüssen erfolgt im Rahmen der *Mindlinschen* Plattentheorie.

Wir wollen annehmen, daß wir für die Approximation der Durchbiegung $w(r)$ einen Ansatz der Form

$$w(r) = \mathbf{N}\mathbf{v} \quad (3.4-5)$$

gemacht haben. Die Anwendung von \mathbf{D} auf die Matrix der Formfunktionen liefert wie üblich

$$\mathbf{B} = \mathbf{D}\mathbf{N} \quad (3.4-6)$$

Die Berechnung der Steifigkeitsmatrix nach Gleichung (2.4-5) ergibt dann

$$\mathbf{K} = \int_V z^2 \frac{E}{1-\nu^2} \mathbf{B}^T \mathbf{H} \mathbf{B} dV = \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \int_{r_1}^{r_2} z^2 \frac{E}{1-\nu^2} \mathbf{B}^T \mathbf{H} \mathbf{B} r d\phi dr dz \quad (3.4-7)$$

Da \mathbf{B} nur von r nicht aber von z und ϕ abhängt, kann die Integration über z und ϕ ausgeführt werden. Wenn auch hier die Elementdicke b und der E-Modul als konstant angenommen wird, erhält man

$$\begin{aligned} \mathbf{K} &= \frac{E}{1-\nu^2} 2\pi \frac{1}{3} \left(\frac{b}{2}\right)^3 2 \int_{r_1}^{r_2} \mathbf{B}^T \mathbf{H} \mathbf{B} r dr \\ \mathbf{K} &= \frac{Eb^3}{12(1-\nu^2)} 2\pi \int_{-1}^{+1} \mathbf{B}^T \mathbf{H} \mathbf{B} \left(\frac{1}{2} \Delta r \xi + r_0\right) \frac{1}{2} \Delta r d\xi \end{aligned} \quad (3.4-8)$$

Wenn man die Plattensteifigkeit

$$k = \frac{Eb^3}{12(1-\nu^2)} \quad (3.4-9)$$

einführt, erhält man schließlich

$$\mathbf{K} = k\pi \Delta r \int_{-1}^{+1} \mathbf{B}^T \mathbf{H} \mathbf{B} \left(\frac{1}{2} \Delta r \xi + r_0\right) d\xi \quad (3.4-10)$$

In \mathbf{B} gehen zweite Ableitungen der Durchbiegung nach der r -Koordinate ein, so daß die Ansatzfunktionen eines finiten Elementes mindestens C_1 stetig sein müssen. Das bedeutet, daß der Näherungsansatz für die Durchbiegung w als Unbekannte mindestens die Durchbiegung und die Biegewinkel an den beiden Knotenkreisen 1 und 2 des finiten Elementes aufweisen muß, d.h

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} w_1 \\ \phi_1 \\ w_2 \\ \phi_2 \end{bmatrix}. \quad (3.4-11)$$

Der Verschiebungsansatz kann also analog zum Balkenelement gewählt werden (es gelten die in Bild 3.2-1 eingeführten Bezeichnungen), und man erhält in der lokalen Koordinate ξ für den Ansatz

$$\mathbf{w}(\xi) = \mathbf{N}(\xi) \mathbf{v} = \begin{bmatrix} N_1(\xi) & N_2(\xi) & N_3(\xi) & N_4(\xi) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ \phi_1 \\ w_2 \\ \phi_2 \end{bmatrix} \quad (3.4-12)$$

mit

$$N_1 = \frac{1}{4}(1-\xi)^2(2+\xi) \quad (3.4-13a)$$

$$N_2 = \frac{1}{8}\Delta r(1-\xi^2)(1-\xi) \quad (3.4-13b)$$

$$N_3 = \frac{1}{4}(1+\xi)^2(2-\xi) \quad (3.4-13c)$$

$$N_4 = -\frac{1}{8}\Delta r(1-\xi^2)(1+\xi) \quad (3.4-13d)$$

Die Matrix \mathbf{B} hat die Form

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{d^2}{dr^2} \\ \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \end{bmatrix} \mathbf{N}(\xi) = \begin{bmatrix} \frac{4}{\Delta r^2} \frac{d^2}{d\xi^2} & \frac{1}{2} \frac{d}{d\xi} \\ \frac{1}{\Delta r} \frac{d}{d\xi} & \frac{1}{\Delta r} \frac{d}{d\xi} \end{bmatrix} \mathbf{N}(\xi) \quad (3.4-14)$$

Einsetzen der Ansatzfunktionen in (3.4-14) ergibt

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{6}{\Delta r^2} \xi & \frac{1}{2\Delta r}(-1+3\xi) & -\frac{6}{\Delta r^2} \xi & \frac{1}{2\Delta r}(1+3\xi) \\ \frac{-3+3\xi^2}{2\Delta r(\frac{1}{2}\Delta r\xi+r_0)} & \frac{-1-2\xi+3\xi^2}{4(\frac{1}{2}\Delta r\xi+r_0)} & \frac{3-3\xi^2}{2\Delta r(\frac{1}{2}\Delta r\xi+r_0)} & \frac{1-2\xi-3\xi^2}{4(\frac{1}{2}\Delta r\xi+r_0)} \end{bmatrix} \quad (3.4-15)$$

Damit läßt sich die Steifigkeitsmatrix nach Gleichung (3.4-10) berechnen.

Für die Berechnung ist eine numerische Integration zweckmäßig, z.B. mit einer *Gauß*-schen Integrationsformel mit N Stützstellen.²⁴

Die äquivalenten Knotenkräfte infolge von Flächenlasten $q(\xi)$ berechnen sich nach Gleichung (2.4-9) aus

$$\mathbf{f}_q = \int_0^1 \mathbf{N}^T \bar{q} dO = \pi \Delta r \int_{-1}^1 \mathbf{N}^T(\xi) \bar{q}(\xi) \left(\frac{1}{2} \Delta r \xi + r_0 \right) d\xi, \quad (3.4-16)$$

wobei hier die Integration über die gesamte Oberfläche eines durch die beiden Knotenkreise 1 und 2 begrenzten Elementes erfolgen muß.

²⁴ Die Gaußschen Quadraturformeln integrieren Funktionen entsprechend

$$I = \int_{-1}^1 f(\xi) d\xi = \sum_{I=1}^N w_I^{(N)} f(\xi_I^{(N)}),$$

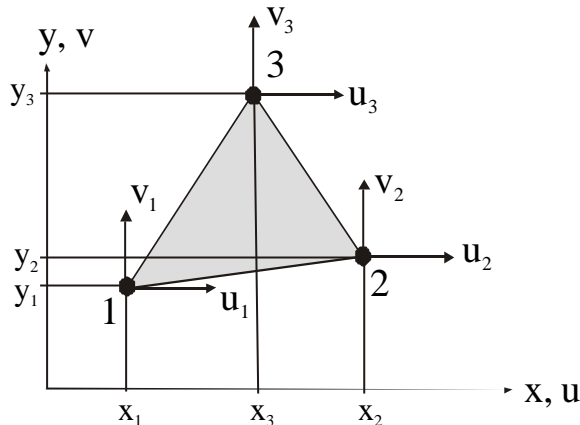
wobei die Gewichte und Stützstellen tabelliert vorliegen (siehe dazu auch die Vorlesung *Mathematischen und Numerische Methoden der Mechanik - Teil II*). Für die Stützstellen von $N=1...4$ gilt

N	$w_I^{(N)}$	$\xi_I^{(N)}$
1	2	0
2	1	$\pm 0,5773502692$
3	0,555...5 0,888...8	$\pm 0,7745966692$ 0
4	0,3478548451 0,6521541549	$\pm 0,8611363116$ $\pm 0,3399810435$

Für die Integration der Plattensteifigkeitsmatrix ist eine 4-Punkte *Gauß*-Integration zweckmäßig.

3.5. Das 3-Knoten Dreieckselement für Scheibenberechnungen

In diesem Abschnitt behandeln wir ein ebenes Dreieckselement mit 3 Knoten für die Berechnung von Scheibenproblemen. Das Modell einer Scheibe setzt eine ebene



Mittelfläche, eine geringe Dicke, die klein gegenüber den Flächenabmessungen ist, und Belastungen ausschließlich in der Mittelfläche voraus. Wir können dann annehmen, daß die Spannungsverteilung über die Dicke näherungsweise konstant ist. Der Spannungsvektor hat dann nur drei Komponenten, die beiden Normalspannungen σ_x , σ_y und die Schubspannung τ_{xy} .²⁵ Analog gibt es zwei Dehnungen ϵ_x , ϵ_y und die Gleitung γ_{xy} .

Bild 3.5-1 Dreieckselement mit 3 Knoten

Der Zusammenhang zwischen den Verzerrungen und den Verschiebungen $u(x,y)$ und $v(x,y)$ wird im Falle kleiner Verschiebungen durch Gleichung (2.1-3) ausgedrückt. Für den Zusammenhang zwischen Spannungen und Verzerrungen gilt hier das *Hookesche* Materialgesetz entsprechend Gleichung (2.1-11) mit (2.1-12) für den isotropen ebenen Spannungszustand.²⁶ Die Verzerrungen ergeben sich aus den ersten Ableitungen der Verschiebungen nach den (x,y) -Koordinaten. In das *Elastische Potential* gehen daher nur die ersten Ableitungen der Verschiebungen ein, so daß es offenbar recht, wenn auf dem gesamten Rand eines zweidimensionalen finiten Elementes die Verschiebungen zwischen benachbarten Elementen stetig sind. Das einfachste finite Element ist das im Bild 3.5-1 abgebildete Dreieckselement mit 3 Knoten. Wenn es uns gelingt, einen Verschiebungsansatz abzuleiten, der durch die unbekanntenen Verschiebungen an den Knoten des Dreiecks ausgedrückt wird, ist diese Stetigkeitsbedingung stets erfüllt wie das Bild 3.5-2 zeigt.

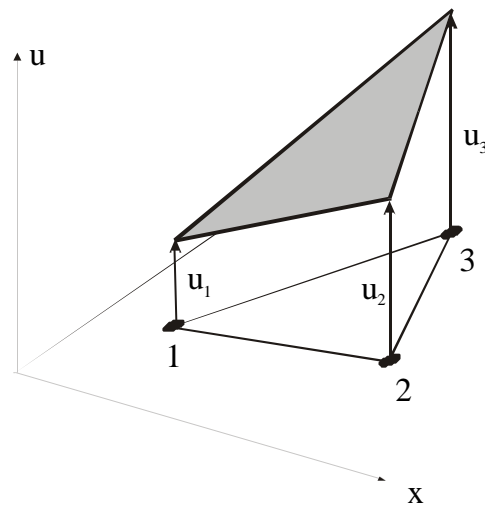


Bild 3.5-2 Verlauf einer linearen Funktion im Dreieck, die durch die drei Funktionswerte an den Knotenpunkten aufgespannt wird

²⁵ Wir verwenden hier zunächst wegen der besseren Übersichtlichkeit die Bezeichnungen x, y für die Koordinatenrichtungen und u, v für die Verschiebungen in Richtung dieser Koordinaten.

²⁶ Manchmal ist für eine Berechnung auch der ebene Formänderungszustand erforderlich. Dazu braucht man nur in den Gleichungen für den ebenen Spannungszustand E ersetzen durch $\frac{E}{1-\nu^2}$ und ν ersetzen durch $\frac{\nu}{1-\nu}$. Die noch fehlende Spannungskomponente σ_z läßt sich mit $\epsilon_z = 0$ aus dem *Hookeschen* Gesetz berechnen. Man erhält $\sigma_z = \nu(\sigma_x + \sigma_y)$.

Die sechs Knotenverschiebungen fassen wir in dem Vektor \mathbf{v} folgendermaßen zusammen:

$$\mathbf{v}^T = [u_1 \quad v_1 \mid u_2 \quad v_2 \mid u_3 \quad v_3] \quad (3.5-1)$$

Im Dreieckselement wird ein linearer Ansatz in der Form

$$u(x, y) = a_1 + a_2 x + a_3 y \quad (3.5-2a)$$

$$v(x, y) = a_4 + a_5 x + a_6 y \quad (3.5-2b)$$

eingeführt. In Matrixschreibweise lautet dieser Ansatz

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \mathbf{P}\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 1 & x & y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_6 \end{bmatrix} \quad (3.5-3)$$

Auswerten des Ansatzes an den Knoten liefert die \mathbf{A} -Matrix. Die Inversion von \mathbf{A} und bilden von:

$$\mathbf{N} = \mathbf{P}\mathbf{A}^{-1} \quad (3.5-4)$$

ergibt

$$\mathbf{u} = \mathbf{N}\mathbf{v} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & \vdots & N_2 & 0 & \vdots & N_3 & 0 \\ 0 & N_1 & \vdots & 0 & N_2 & \vdots & 0 & N_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{bmatrix} \quad (3.5-5)$$

mit:

$$N_1 = [(x_2 y_3 - x_3 y_2) + (y_2 - y_3)x + (x_3 - x_2)y] \frac{1}{2A} \quad (3.5-6a)$$

$$N_2 = [(x_3 y_1 - x_1 y_3) + (y_3 - y_1)x + (x_1 - x_3)y] \frac{1}{2A} \quad (3.5-6b)$$

$$N_3 = [(x_1 y_2 - x_2 y_1) + (y_1 - y_2)x + (x_2 - x_1)y] \frac{1}{2A} \quad (3.5-6c)$$

und

$$2A = (x_2 y_3 - x_3 y_2) + (x_3 y_1 - x_1 y_3) + (x_1 y_2 - x_2 y_1) \quad (3.5-7)$$

A ist der Flächeninhalt des Dreiecks. Die Matrix $\mathbf{B} = \mathbf{D}\mathbf{N}$ läßt sich damit folgendermaßen schreiben:

$$\mathbf{B} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} (y_2 - y_3) & 0 & \vdots & (y_3 - y_1) & 0 & \vdots & (y_1 - y_2) & 0 \\ 0 & (x_3 - x_2) & \vdots & 0 & (x_1 - x_3) & \vdots & 0 & (x_2 - x_1) \\ (x_3 - x_2) & (y_2 - y_3) & \vdots & (x_1 - x_3) & (y_3 - y_1) & \vdots & (x_2 - x_1) & (y_1 - y_2) \end{bmatrix} \quad (3.5-8)$$

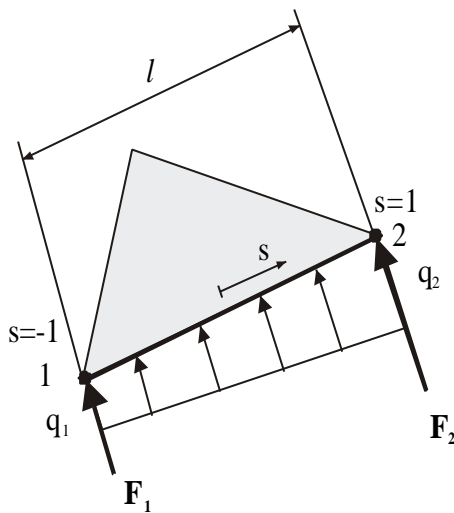
Da \mathbf{B} konstant ist, läßt sich \mathbf{K} problemlos berechnen. Wenn auch die Elementdicke und die *Hooksche* Matrix elementweise konstant sind, ergibt sich

$$\mathbf{K} = \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{E} \mathbf{B} dV = \mathbf{b} \mathbf{B}^T \mathbf{E} \mathbf{B} \int_A dA = \mathbf{A} \mathbf{b} \mathbf{B}^T \mathbf{E} \mathbf{B} \quad (3.5-9)$$

Bei einer Linienlast, die senkrecht auf einer Elementkante (siehe Bild 3.5-3) steht, ergibt sich für die beiden Kräfte F_1 und F_2 ²⁷

$$F_1 = \frac{1}{6} l (2q_1 + q_2) \quad (3.5-10a)$$

$$F_2 = \frac{1}{6} l (q_1 + 2q_2) \quad (3.5-10b)$$



Die Kräfte F_1 und F_2 stehen ebenfalls senkrecht auf der Seitenkante. Vor der Einspeicherung in das globale Gleichungssystem müssen diese Kräfte noch auf das globale Koordinatensystem transformiert werden. Falls eine Linienlast tangential zur Elementkante wirkt, ergeben sich analog Knotenkräfte in Richtung der Elementkante, die ebenfalls noch auf das globale Koordinatensystem transformiert werden müssen.

Bild 3.5-3 Linienlast auf einer Elementkante

Natürliche Koordinaten im Dreieck (Dreieckskoordinaten)

Bei eindimensionalen Problemen haben wir durch die Einführung der dimensionslosen *natürlichen* Koordinate $\xi \in [-1,1]$ die Ableitung von finiten Elementen vereinfacht. Bei Dreieckselementen führt die Benutzung von Dreieckskoordinaten (natürliche Koordinaten im Dreieck) zu ähnlichen Vorteilen (siehe Bild 3.5-4). Die Dreieckskoordinaten haben ihren Ursprung jeweils auf den Seitenkanten und nehmen am gegenüberliegenden Knoten den Wert 1 an, d.h. es gilt $\zeta_L \in [0,1]$, $L=1,2,3$. Ein Punkt P im Dreieck hat damit die folgenden Koordinaten (siehe Bild 3.5-4).

$$\zeta_{1P} = \frac{A_1}{A}, \quad \zeta_{2P} = \frac{A_2}{A}, \quad \zeta_{3P} = \frac{A_3}{A} \quad (3.5-11)$$

²⁷ Für die Berechnung reicht es aus, nur die Formfunktionen entlang der Seitenkante zu betrachten. Diese ist offensichtlich linear und kann als $u(s) = \frac{1}{2}(1-s)u_1 + \frac{1}{2}(1+s)u_2$ geschrieben werden, wobei hier s die natürliche Koordinate längs der Seitenkante ist, und u_1, u_2 sind die Verschiebungen der Knoten normal zur Seitenkante (positiv in Richtung auf das Elementinnere). Dann berechnen sich die Knotenkräfte aus

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix} = \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(1-s) \\ \frac{1}{2}(1+s) \end{bmatrix} q(s) \frac{l}{2} ds = \frac{l}{2} \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(1-s) \\ \frac{1}{2}(1+s) \end{bmatrix} \left\{ \frac{1}{2}(1-s)q_1 + \frac{1}{2}(1+s)q_2 \right\} ds = \frac{l}{6} \begin{bmatrix} 2q_1 + q_1 \\ q_1 + 2q_2 \end{bmatrix}.$$

Die drei Dreieckskoordinaten sind nicht voneinander unabhängig. Es gilt

$$\zeta_{1P} + \zeta_{2P} + \zeta_{3P} = \frac{A_1 + A_2 + A_3}{A} = 1 \quad (3.5-12)$$

Zwischen den Koordinaten x , y und ζ_1 , ζ_2 , ζ_3 besteht ein linearer Zusammenhang.

$$x = x_1\zeta_1 + x_2\zeta_2 + x_3\zeta_3 \quad (3.5-13a)$$

$$y = y_1\zeta_1 + y_2\zeta_2 + y_3\zeta_3 \quad (3.5-13b)$$

$$1 = \zeta_1 + \zeta_2 + \zeta_3 \quad (3.5-13c)$$

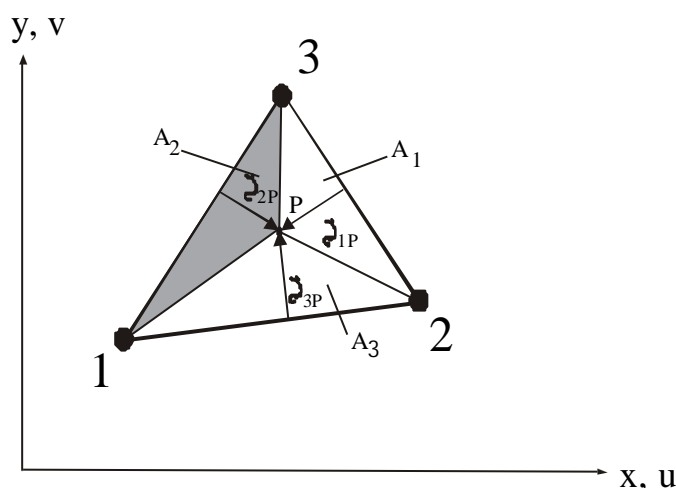


Bild 3.5-4 Natürliche Koordinaten im Dreieck

Das Gleichungssystem (3.5-13) kann nach ζ_1 , ζ_2 , ζ_3 umgestellt werden, und man erhält

$$\begin{bmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \\ \zeta_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} (y_2 - y_3) & (x_3 - x_2) & (x_2 y_3 - x_3 y_2) \\ (y_3 - y_1) & (x_1 - x_3) & (x_3 y_1 - x_1 y_3) \\ (y_1 - y_2) & (x_2 - x_1) & (x_1 y_2 - x_2 y_1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3.5-14)$$

Für die Ableitungen ergibt sich:²⁸

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \zeta_1}{\partial x} & \frac{\partial \zeta_2}{\partial x} \\ \frac{\partial \zeta_1}{\partial y} & \frac{\partial \zeta_2}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \zeta_1} \\ \frac{\partial}{\partial \zeta_2} \end{bmatrix} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} (y_2 - y_3) & (y_3 - y_1) \\ (x_3 - x_2) & (x_1 - x_3) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \zeta_1} \\ \frac{\partial}{\partial \zeta_2} \end{bmatrix} \quad (3.5-15)$$

²⁸ Wobei hier vorausgesetzt wurde, daß die abzuleitenden Funktionen im lokalen Koordinatensystem nur noch von ζ_1 und ζ_2 abhängig sind, d.h. die ζ_3 Koordinate schon mittels Gleichung (3.5-13c) eliminiert wurde.

Mit den Dreieckskoordinaten lassen sich sehr systematisch Dreieckselemente entwickeln. So lauten beispielsweise die Ansatzfunktionen für das 3-Knoten Dreieckselement (siehe Bild 3.5-4):²⁹

$$N_1 = \zeta_1 \quad (3.5-16a)$$

$$N_2 = \zeta_2 \quad (3.5-16b)$$

$$N_3 = \zeta_3 = 1 - \zeta_1 - \zeta_2 \quad (3.5-16c)$$

Mit Hilfe der Dreieckskoordinaten lassen sich Integrationsformeln für die Integration über Dreiecksflächen herleiten. So gilt beispielsweise für die Integration in den natürlichen Koordinaten³⁰

$$I_{mnp} = \int_A \zeta_1^m \zeta_2^n \zeta_3^p dA = 2A \frac{m!n!p!}{(m+n+p+2)!} \quad (3.5-17)$$

Für die Integration über (x, y) muß das Integral zunächst auf die natürlichen Dreieckskoordinaten transformiert werden, um die Formel (3.5-17) anwenden zu können. Für die Lösung des Integrals

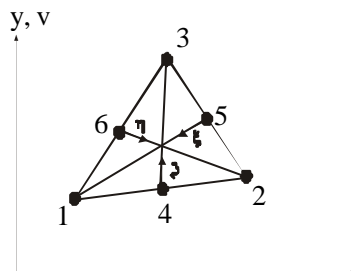
$$I_{rs} = \int_A \bar{x}^r \bar{y}^s dA \quad (3.5-18)$$

ergibt sich

$$I_{rs} = \frac{r!s!}{(r+s+2)!} 2A \sum_{i=0}^r \sum_{j=0}^s \frac{(r+s-i-j)!(i+j)!}{i!j!(r-i)!(s-j)!} \bar{x}_1^{r-i} \bar{x}_2^i \bar{y}_1^{s-j} \bar{y}_2^j, \quad (3.5-19)$$

wenn man ohne Einschränkung der Allgemeinheit annimmt, daß das lokale Koordinatensystem (\bar{x}, \bar{y}) genau im Knoten 3 des Dreieckselementes liegt, d.h. für die Koordinaten des Knoten 3 gilt $\bar{x}_3 = \bar{y}_3 = 0$.³¹

²⁹ Für ein Dreieckselement mit 6 Knotenpunkten (quadratischer Ansatz) ergibt sich



$$\begin{aligned} N_1 &= \zeta_1 (2\zeta_1 - 1) \\ N_2 &= \zeta_2 (2\zeta_2 - 1) \\ N_3 &= \zeta_3 (2\zeta_3 - 1) \\ N_4 &= 4\zeta_1 \zeta_2 \\ N_5 &= 4\zeta_2 \zeta_3 \\ N_6 &= 4\zeta_1 \zeta_3 \end{aligned}$$

³⁰ Die Herleitung ergibt sich mittels partieller Integration.

³¹ Für eine beliebige Lage des Koordinatensystem gilt $I_{mn} = \int x^m y^n dA = \int (\bar{x} + x_3)^m (\bar{y} + y_3)^n dA$. Dieses Integral kann durch Auflösung des Integranden mittels der binomischen Formel berechnet werden, wobei dabei Integrale der Form (3.5-19) zu berechnen sind.

3.6. Das 4-Knoten Rechteckelement für Scheibeberechnungen

Nachfolgend behandeln wir ein Rechteckelement mit 4 Knotenpunkten (siehe Bild 3.6-1) und nehmen zunächst an, daß die Seitenkanten parallel zu den Koordinatenachsen orientiert sind. Dieses Element ist eine Erweiterung des eindimensionalen Elementes (siehe Abschnitt 3.1), so daß wir die Ansatzfunktionen für dieses Element offensichtlich durch multiplikative Verknüpfung der eindimensionalen Ansatzfunktionen aus Gleichung (3.1-4) ableiten können. In dem lokalen (ξ, η) Koordinatensystem ist das Element ein Quadrat der Kantenlänge 2. Da wir jetzt vier Knoten haben, können wir die Verschiebungen in jeder Koordinatenrichtung durch vier Polynomanteile approximieren, z.B. durch $(1, x, y, xy)$. Beim Dreieckselement mit drei Knoten bestand der Ansatz aus den Polynomanteilen $(1, x, y)$, durch die gerade ein vollständiges lineares Polynom beschrieben wird. Wegen des zusätzlichen Knotens haben wir hier den zusätzlichen Anteil (xy) im Ansatz, der die Genauigkeit der Viereckselement gegenüber den Dreieckselementen deutlich verbessert.³² Wir wollen nachfolgend die Ansatzfunktionen unter Nutzung der eindimensionalen Ansatzfunktionen (3.1-4) direkt angeben.

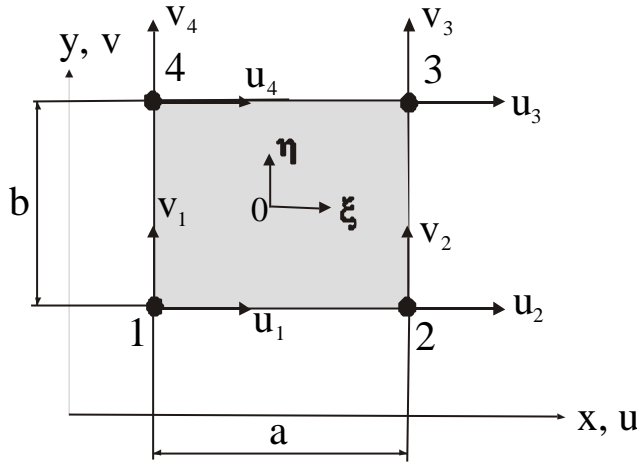


Bild 3.6-1 Rechteckelement mit 4 Knoten

Dieses Element ist eine Erweiterung des eindimensionalen Elementes (siehe Abschnitt 3.1), so daß wir die Ansatzfunktionen für dieses Element offensichtlich durch multiplikative Verknüpfung der eindimensionalen Ansatzfunktionen aus Gleichung (3.1-4) ableiten können. In dem lokalen (ξ, η) Koordinatensystem ist das Element ein Quadrat der Kantenlänge 2. Da wir jetzt vier Knoten haben, können wir die Verschiebungen in jeder Koordinatenrichtung durch vier Polynomanteile approximieren, z.B. durch $(1, x, y, xy)$. Beim Dreieckselement mit drei Knoten bestand der Ansatz aus den Polynomanteilen $(1, x, y)$, durch die gerade ein vollständiges lineares Polynom beschrieben wird. Wegen des zusätzlichen Knotens haben wir hier den zusätzlichen Anteil (xy) im Ansatz, der die Genauigkeit der Viereckselement gegenüber den Dreieckselementen deutlich verbessert.³² Wir wollen nachfolgend die Ansatzfunktionen unter Nutzung der eindimensionalen Ansatzfunktionen (3.1-4) direkt angeben.

$$N_1(\xi, \eta) = \left[\frac{1}{2}(1 - \xi) \right] \left[\frac{1}{2}(1 - \eta) \right] = \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 - \eta) \quad (3.6-1a)$$

$$N_2(\xi, \eta) = \left[\frac{1}{2}(1 + \xi) \right] \left[\frac{1}{2}(1 - \eta) \right] = \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 - \eta) \quad (3.6-1a)$$

$$N_3(\xi, \eta) = \left[\frac{1}{2}(1 + \xi) \right] \left[\frac{1}{2}(1 + \eta) \right] = \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 + \eta) \quad (3.6-1a)$$

$$N_4(\xi, \eta) = \left[\frac{1}{2}(1 - \xi) \right] \left[\frac{1}{2}(1 + \eta) \right] = \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 + \eta) \quad (3.6-1d)$$

Die Gleichungen (3.6-1) lassen sich auch in kompakter Form als

$$N_L(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1 + \xi_L \xi)(1 + \eta_L \eta), \quad L=1, \dots, 4 \quad (3.6-2)$$

schreiben, wobei (ξ_L, η_L) die lokalen Koordinaten des Knotens L sind ($\xi_L, \eta_L \in [-1, 1]$). Die Ansatzfunktionen (3.6-1) enthalten genau die Polynomterme $(1, \xi, \eta, \xi\eta)$ wie man durch Ausmultiplizieren zeigen kann. Die Summe der Formfunktionen ergibt

³² Das ist übrigens der Grund für die Bevorzugung von Viereckselementen gegenüber Dreieckselementen und Hexaederelementen gegenüber Teraederelementen, wo der Unterschied infolge des deutlich höheren Grades der Polynomansätze noch stärker ist.

$$\sum_{L=1}^4 N_L(\xi, \eta) = 1, \quad (3.6-3)$$

so daß auch die Bedingung (2.3-18) erfüllt ist, die eine notwendige Bedingung dafür ist, daß das Element bei Starrkörperbewegungen korrekt reagiert, d.h. zum Beispiel keine Spannungen liefert. Damit ergibt sich der Verschiebungsansatz des Elementes zu

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{v} \end{bmatrix} = \mathbf{N}(\xi, \eta) \mathbf{v} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{v}_1 \\ \mathbf{u}_2 \\ \mathbf{v}_2 \\ \mathbf{u}_3 \\ \mathbf{v}_3 \\ \mathbf{u}_4 \\ \mathbf{v}_4 \end{bmatrix} \quad (3.6-4)$$

Zu dem gleichen Ansatz gelangt man übrigens auch, wenn man von dem Polynomansatz

$$\mathbf{u}(\xi, \eta) = \begin{bmatrix} \mathbf{u}(\xi, \eta) \\ \mathbf{v}(\xi, \eta) \end{bmatrix} = \mathbf{P}(\xi, \eta) \mathbf{a} = \begin{bmatrix} 1 & \xi & \eta & \xi\eta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \xi & \eta & \xi\eta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_8 \end{bmatrix} \quad (3.6-5)$$

ausgeht, diesen Ansatz an den 4 Knotenpunkten auswertet, die so entstehende Matrix \mathbf{A} invertiert und $\mathbf{N}(\xi, \eta) = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{P}(\xi, \eta)$ berechnet (siehe die allgemeine Darstellung der Ableitung des Verschiebungsansatzes in Abschnitt 2.3). Aus dem Zusammenhang zwischen den Verzerrungen und Verschiebungen Gleichung (2.1-3) erhält man die Differentiationsmatrix \mathbf{D} , deren Anwendung auf die Matrix der Formfunktionen nach Gleichung (2.4-2) die Matrix \mathbf{B} ergibt. Um \mathbf{B} berechnen zu können, müssen wir die Ableitungen nach x und y noch durch die Ableitungen nach den lokalen Koordinaten ξ und η ersetzen. Der Zusammenhang zwischen den Koordinaten folgt aus Bild 3.6-1 zu

$$x = \frac{1}{2} a \xi + x_0 \quad (3.6-6a)$$

$$y = \frac{1}{2} b \eta + y_0 \quad (3.6-6b)$$

Daraus folgt für die Ableitungen

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \xi} = \frac{2}{a} \frac{\partial}{\partial \xi} \quad (3.6-7a)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial \eta}{\partial y} \frac{\partial}{\partial \eta} = \frac{2}{b} \frac{\partial}{\partial \eta} \quad (3.6-7b)$$

Die Gleichungen (3.6-7) lassen sich in Matrizenschreibweise als

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} = \mathbf{R} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \end{bmatrix} \quad (3.6-8)$$

schreiben, wobei sich die Matrix \mathbf{R} folgendermaßen berechnet:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial x} \\ \frac{\partial \xi}{\partial y} & \frac{\partial \eta}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{a} & 0 \\ 0 & \frac{2}{b} \end{bmatrix}. \quad (3.6-9)$$

Die Matrix \mathbf{R} ist die Inverse der bekannten *Jacobischen* Matrix \mathbf{J} .³³ Die besonders einfache Form ergibt sich hier dadurch, daß die Elementkanten und die Achsen des lokalen Koordinatensystems parallel zum globalen Koordinatensystem liegen (im Abschnitt 5. wird ein allgemeinerer Fall betrachtet). Wir können jetzt die Matrix \mathbf{B} angeben, die wir für die Berechnung der Steifigkeitsmatrix benötigen. Wir wenden dazu die Differentiationsmatrix \mathbf{D}

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{a} \frac{\partial}{\partial \xi} & 0 \\ 0 & \frac{2}{b} \frac{\partial}{\partial \eta} \\ \frac{2}{b} \frac{\partial}{\partial \eta} & \frac{2}{a} \frac{\partial}{\partial \xi} \end{bmatrix} \quad (3.6-10)$$

auf die Matrix der Ansatzfunktionen \mathbf{N} in Gleichung (3.6-4) an und erhalten

$$\mathbf{B}(\xi, \eta) = \mathbf{D}\mathbf{N}(\xi, \eta) = [\mathbf{B}_1 \quad \mathbf{B}_2 \quad \mathbf{B}_3 \quad \mathbf{B}_4] \quad (3.6-11)$$

mit

$$\mathbf{B}_L = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{xL} & 0 \\ 0 & \mathbf{B}_{yL} \\ \mathbf{B}_{yL} & \mathbf{B}_{xL} \end{bmatrix} \quad (3.6-12)$$

und

$$\mathbf{B}_{xL} = \frac{2}{a} \frac{\partial \mathbf{N}_L(\xi, \eta)}{\partial \xi} = \frac{2}{a} \frac{1}{4} \xi_L (1 + \eta_L \eta) = \frac{1}{2a} \xi_L (1 + \eta_L \eta) \quad (3.6-13a)$$

$$\mathbf{B}_{yL} = \frac{2}{b} \frac{\partial \mathbf{N}_L(\xi, \eta)}{\partial \eta} = \frac{2}{b} \frac{1}{4} \eta_L (1 + \xi_L \xi) = \frac{1}{2b} \eta_L (1 + \xi_L \xi) \quad (3.6-13b)$$

³³ Die JACOBIsche Matrix $\mathbf{J}=\mathbf{R}^{-1}$ lautet hier

$$\mathbf{J} = \frac{1}{\det \mathbf{R}} \begin{bmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} & -\frac{\partial \eta}{\partial x} \\ -\frac{\partial \xi}{\partial y} & \frac{\partial \eta}{\partial y} \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} \frac{2}{b} & 0 \\ 0 & \frac{2}{a} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix},$$

und damit ergibt sich $dA = dx dy = \det \mathbf{J} d\xi d\eta = \frac{1}{4} ab d\xi d\eta$.

Damit kann die Steifigkeitsmatrix nach Gleichung (2.4-5) berechnet werden. Die Integration über die Dickenrichtung liefert die Dicke $h(\xi, \eta)$ als Funktion der lokalen Koordinaten. Wenn die Dicke als Funktion bekannt ist, kann sie durch die lokalen Koordinaten ausgedrückt und in die Integration einbezogen werden. Häufig wird eine veränderliche Dicke durch die Dickenwerte h_L an den Knotenpunkten L des Elementnetzes beschrieben. Dann kann man die Verschiebungsansatzfunktionen auch benutzen, um die Dickenverteilung im Element zu approximieren, so daß man

$$h(\xi, \eta) = \sum_{L=1}^4 N_L(\xi, \eta) h_L \quad (3.6-15)$$

erhält. Die Steifigkeitsmatrix hat folgende Form

$$\begin{aligned} \mathbf{K} &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 h(\xi, \eta) \mathbf{B}^T \mathbf{E} \mathbf{B} \frac{a}{2} \frac{b}{2} d\xi d\eta \\ &= \frac{1}{4} ab \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 h(\xi, \eta) \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1^T \mathbf{E} \mathbf{B}_1 & \mathbf{B}_1^T \mathbf{E} \mathbf{B}_2 & \mathbf{B}_1^T \mathbf{E} \mathbf{B}_3 & \mathbf{B}_1^T \mathbf{E} \mathbf{B}_4 \\ & \mathbf{B}_2^T \mathbf{E} \mathbf{B}_2 & \mathbf{B}_2^T \mathbf{E} \mathbf{B}_3 & \mathbf{B}_2^T \mathbf{E} \mathbf{B}_4 \\ & & \mathbf{B}_3^T \mathbf{E} \mathbf{B}_3 & \mathbf{B}_3^T \mathbf{E} \mathbf{B}_4 \\ \text{symm.} & & & \mathbf{B}_4^T \mathbf{E} \mathbf{B}_4 \end{bmatrix} d\xi d\eta \end{aligned} \quad (3.6-16)$$

Jede der 2×2 Submatrizen \mathbf{K}_{IJ} gehört zu einer Knotenkombination (I, J) mit $I, J=1, \dots, 4$. Damit kann man die Matrix \mathbf{K} im Rahmen eines Rechenprogramms systematisch aus diesen Submatrizen aufbauen. Für den Fall einer orthotropen *Hook'schen* Matrix \mathbf{E} mit

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} & 0 \\ E_{12} & E_{22} & 0 \\ 0 & 0 & E_{33} \end{bmatrix} \quad (3.6-17)$$

ergibt sich für eine solche Submatrix

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{IJ} &= \frac{1}{4} ab \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 h(\xi, \eta) \mathbf{B}_I^T \mathbf{E} \mathbf{B}_J d\xi d\eta \\ &= \frac{1}{4} ab \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 h(\xi, \eta) \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{B}_{xI} E_{11} \mathbf{B}_{xJ} + \mathbf{B}_{yI} E_{33} \mathbf{B}_{yJ} & \mathbf{B}_{xI} E_{12} \mathbf{B}_{yJ} + \mathbf{B}_{yI} E_{33} \mathbf{B}_{xJ} \\ \hline \mathbf{B}_{yI} E_{12} \mathbf{B}_{xJ} + \mathbf{B}_{xI} E_{33} \mathbf{B}_{yJ} & \mathbf{B}_{yI} E_{22} \mathbf{B}_{yJ} + \mathbf{B}_{xI} E_{33} \mathbf{B}_{xJ} \end{array} \right] d\xi d\eta \end{aligned} \quad (3.6-18)$$

In diesem Fall kann die Integration noch exakt ausgeführt werden. Wenn man sich die Funktionen in Gleichung (3.6-13) ansieht, erkennt man, daß in (3.6-18) nur vier Typen von Integralen auftreten, wenn man von konstanten Faktoren absieht. Das sind

$$\int_{-1}^1 (1 \pm \xi)^2 = \frac{8}{3}, \quad \int_{-1}^1 (1 - \xi^2) = \frac{4}{3}, \quad \int_{-1}^1 d\xi = 2, \quad \int_{-1}^1 (1 \pm \xi) = 2 \quad (3.6-19)$$

Damit kann problemlos die Steifigkeitsmatrix berechnet³⁴ und programmiert werden.

³⁴ Für das erste Element der Steifigkeitsmatrix ergibt sich beispielsweise $\mathbf{K}_{11}^{11} = \frac{1}{3} b (\alpha E_{11} + \frac{1}{\alpha} E_{33})$, mit $\alpha = \frac{b}{a}$.

3.7. Das 4-Knoten Tetraederelement

In den folgenden beiden Abschnitten soll noch kurz auf dreidimensionale finite Elemente eingegangen werden. Das in diesem Abschnitt behandelte 4-Knoten Tetraederelement ist eine Erweiterung des Dreieckselementes mit drei Knotenpunkten (siehe Abschnitt 3.5.). Das Bild 3.7-1 zeigt die Geometrie und Knoten-anordnung für dieses Element. Die Berechnung kann in Analogie zum Dreieckselement erfolgen. Es ist offensichtlich, daß wir in jeder der drei Koordinatenrichtungen einen linearen Näherungsansatz für die Approximation des Verschiebungszustandes einführen müssen.

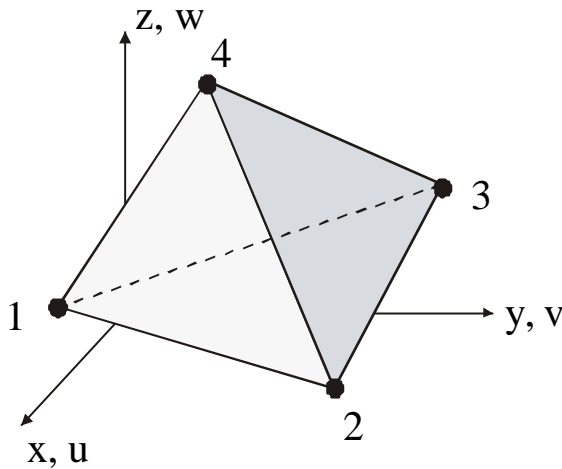


Bild 3.7-1 Tetraederelement mit 4 Knotenpunkten

Der Ansatz kann in Analogie zur Gleichung (3.5-2) aufgeschrieben werden und enthält hier die Polynomterme $(1, x, y, z)$. Die Auswertung dieses Ansatzes an den vier Knotenpunkten führt zur Matrix \mathbf{A} , deren Inversion schließlich analog zur Gleichung (3.5-4) zur Matrix der Formfunktionen \mathbf{G} führt. Die Ableitung der Elementsteifigkeitsmatrix und der Lastvektoren kann schließlich auf dem üblichen Wege erfolgen. Wir wollen hier gleich den eleganteren Lösungsweg unter Nutzung der lokalen Tetraederkoordinaten beschreiben. Die Tetraederkoordinaten $\zeta_L \in [0,1]$, $L=1,\dots,4$, sind analog zu den Dreieckskoordinaten definiert. Sie nehmen jeweils am Knoten L den Wert Eins an, und sind auf der dem Knoten gegenüberliegenden Seite Null. Natürlich sind nur drei dieser Koordinaten unabhängig voneinander, und die vierte Koordinate ζ_4 kann durch die übrigen drei Koordinaten ausgedrückt werden, wobei dazu die Gleichung

$$1 = \zeta_1 + \zeta_2 + \zeta_3 + \zeta_4 \quad (3.7-1)$$

genutzt wird.³⁵ Für den Zusammenhang zwischen den Tetraederkoordinaten und den kartesischen Koordinaten gilt analog zu Gleichung (3.5-13)

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \\ \zeta_3 \\ \zeta_4 \end{bmatrix} = \mathbf{H} \begin{bmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \\ \zeta_3 \\ \zeta_4 \end{bmatrix} \quad (3.7-2)$$

In der Koeffizientenmatrix stehen die Koordinaten der vier Knotenpunkte des Tetraeders. Die Inversion von (3.7-2) ergibt³⁶

³⁵ Diese Gleichung läßt sich analog zum Dreieck dadurch erhalten, daß man von einem Punkt P im Tetraeder die vier Teilvolumina V_L mit $L=1,\dots,4$ berechnet. Diese Teilvolumina ergeben sich mit den Tetraederkoordinaten zu

$V_L = V\zeta_L$. Die Addition liefert $V = \sum_{L=1}^4 V\zeta_L = V \sum_{L=1}^4 \zeta_L$ und daraus folgt $1 = \sum_{L=1}^4 \zeta_L$.

³⁶ Für die Determinante von \mathbf{H} ergibt sich $\det \mathbf{H} = 6V$, wobei V das Volumen des Tetraeders ist.

$$\begin{bmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \\ \zeta_3 \\ \zeta_4 \end{bmatrix} = \mathbf{J} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3.7-3)$$

mit

$$\mathbf{J} = \mathbf{H}^{-1} = \left[\begin{array}{ccc|c} & & & J_{14} \\ & \bar{\mathbf{J}} & & \vdots \\ & & & \\ \hline J_{41} & \dots & & J_{44} \end{array} \right] \quad (3.7-4)$$

Damit können die Ableitungen mittels

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} = \bar{\mathbf{J}}^T \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \zeta_1} \\ \frac{\partial}{\partial \zeta_2} \\ \frac{\partial}{\partial \zeta_3} \end{bmatrix} \quad (3.7-5)$$

transformiert werden, wobei auch hier wieder vorausgesetzt wird, daß die zu differenzierenden Funktionen nur noch von den lokalen Koordinaten $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3$ abhängig sind. Die Matrix $\bar{\mathbf{J}}$ ist konstant und hängt nur von der Geometrie des Elementes ab. Für die Ansatzfunktionen in den Tetraederkoordinaten erhält man die besonders einfache Form³⁷

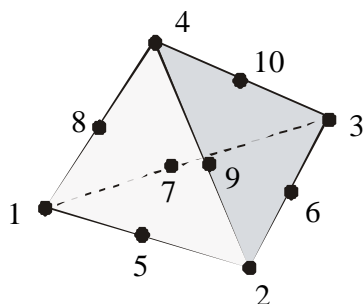
$$N_L = \zeta_L, \quad L=1,2,3,4 \quad (3.7-6)$$

Wenn man die Koordinate ζ_4 ersetzt, gilt

$$N_4 = 1 - \zeta_1 - \zeta_2 - \zeta_3 \quad (3.7-7)$$

Der Verschiebungsansatz lautet damit

³⁷ Für ein Tetraederelement mit 10 Knoten (quadratischer Verschiebungsansatz) gilt:



Eckknoten ($L=1,2,3,4$):

$$N_L = \zeta_L (2\zeta_L - 1)$$

Seitenmittenknoten ($L=5,6,\dots,10$):

$$N_5 = 4\zeta_1\zeta_2$$

$$N_6 = 4\zeta_2\zeta_3$$

...

$$N_{10} = 4\zeta_3\zeta_4$$

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \mathbf{N}\mathbf{v} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}\zeta_1 & \mathbf{I}\zeta_2 & \mathbf{I}\zeta_3 & \mathbf{I}(1-\zeta_1-\zeta_2-\zeta_3) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_2 \\ \mathbf{u}_3 \\ \mathbf{u}_4 \end{bmatrix}, \quad (3.7-8)$$

mit

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.7-9)$$

und

$$\mathbf{u}_L = \begin{bmatrix} u_L \\ v_L \\ w_L \end{bmatrix} \quad (3.7-10)$$

Damit stehen alle Grundlagen bereit, um die Steifigkeitsmatrix \mathbf{K} (12×12) für dieses Element zu berechnen. Der Zusammenhang zwischen Verzerrungen und Verschiebungen wird im 3D Fall durch Gleichung (2.1-4) beschrieben. Damit ergibt sich die Differentiationsmatrix zu

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{21} & J_{31} \\ J_{12} & J_{22} & J_{32} \\ J_{13} & J_{23} & J_{33} \\ J_{11}+J_{12} & J_{21}+J_{22} & J_{31}+J_{32} \\ J_{12}+J_{13} & J_{22}+J_{23} & J_{32}+J_{33} \\ J_{11}+J_{13} & J_{21}+J_{23} & J_{31}+J_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \zeta_1} \\ \frac{\partial}{\partial \zeta_2} \\ \frac{\partial}{\partial \zeta_3} \end{bmatrix} = \mathbf{R} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \zeta_1} \\ \frac{\partial}{\partial \zeta_2} \\ \frac{\partial}{\partial \zeta_3} \end{bmatrix} \quad (3.7-8)$$

Die Ableitung der Formfunktionen nach den lokalen Tetraederkoordinaten liefert

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \zeta_1} \\ \frac{\partial}{\partial \zeta_2} \\ \frac{\partial}{\partial \zeta_3} \end{bmatrix} \mathbf{N} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (3.7-9)$$

Jetzt kann die Matrix \mathbf{B} , die für dieses Element offensichtlich konstant ist, berechnet werden aus

$$\mathbf{B} = \mathbf{DN} = \mathbf{RS} \quad (3.7-10)$$

Dann ergibt sich für die Steifigkeitsmatrix

$$\mathbf{K} = \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{EB} dV = \mathbf{B}^T \mathbf{EB} V, \quad (3.7-11)$$

wobei das Volumen aus $V = \frac{1}{6} \det \mathbf{H}$ berechnet werden kann, wenn man die Knotenkoordinaten des Tetraederelementes kennt. Hier ist also der Integrand in (3.7-11) konstant, so daß nur mit dem Volumen zu multiplizieren ist. Bei der Verwendung höherer Ansatzfunktionen ist das nicht mehr der Fall. Für die dann erforderlichen Integrationen ist folgende Formel hilfreich.³⁸

$$J_{mnpq} = \int_V \zeta_1^m \zeta_2^n \zeta_3^p \zeta_4^q dV = \frac{6Vm!n!p!q!}{(m+n+p+q+3)!} \quad (3.7-12)$$

³⁸ Die Ableitung kann wieder unter Beachtung der veränderlichen Integrationsgrenzen und Anwendung der partiellen Integration abgeleitet werden.

3.8 Das 8-Knoten Hexaederelement³⁹

Das 8-Knoten Hexaederelement ist eine Erweiterung des 4-Knoten Rechteckelementes (siehe Abschnitt 3.6). Die Ableitung der Formfunktionen und die Berechnung der Steifigkeitsmatrix und der Kraftvektoren erfolgt analog zu der Darstellung in Abschnitt 3.6. Das Element hat 8 Knotenpunkte, so daß in jeder der drei Koordinatenrichtung ein Verschiebungsansatz mit den Termen

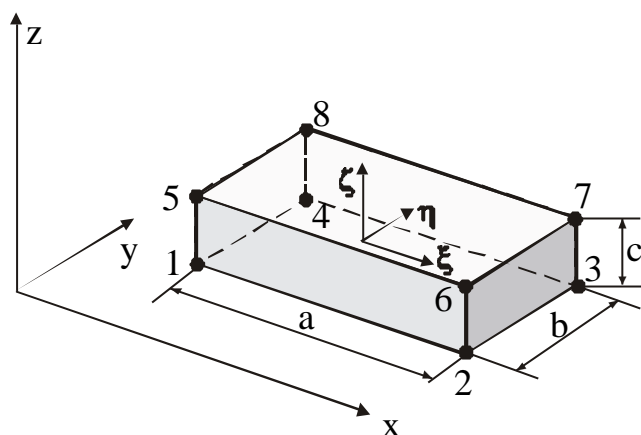


Bild3.8-1 Hexaederelement mit 8 Knoten

(1, x, y, z, xy, yz, zx, xyz) verwirklicht werden kann. Neben dem vollständigen linearen Ansatz (1,x,y,z) enthält dieser Ansatz noch vier zusätzliche Terme, durch die dieses Element wesentlich genauer als das Tetraederelement mit 4 Knotenpunkten ist. Natürlich hätten auch andere

Terme in dem Ansatz benutzt werden können. Es sollte aber stets das Ziel verfolgt werden, die Ansatzfunktionen so zu konstruieren, daß keine Richtung bevorzugt wird, und außerdem sollten die Ansatzfunktionen keine Polynomanteile mit unnötig hohen Potenzen enthalten, die nicht Teil eines vollständigen Polynoms sind. Die angegebenen Terme des Ansatzes sichern übrigens, daß die Verschiebungen in jeder der drei Koordinatenrichtungen durch eine lineare Funktion approximiert werden. Damit kann man wie beim Rechteckelement auch hier die Ansatzfunktionen aus einer Kombination der linearen Ansatzfunktionen entwickeln. In den lokalen Koordinaten erhält man dann

$$\begin{aligned}
 N_1(\xi, \eta, \varsigma) &= \left[\frac{1}{2}(1-\xi) \right] \left[\frac{1}{2}(1-\eta) \right] \left[\frac{1}{2}(1-\varsigma) \right] = \frac{1}{8}(1-\xi)(1-\eta)(1-\varsigma) \\
 N_2(\xi, \eta, \varsigma) &= \left[\frac{1}{2}(1+\xi) \right] \left[\frac{1}{2}(1-\eta) \right] \left[\frac{1}{2}(1-\varsigma) \right] = \frac{1}{8}(1+\xi)(1-\eta)(1-\varsigma) \\
 N_3(\xi, \eta, \varsigma) &= \left[\frac{1}{2}(1+\xi) \right] \left[\frac{1}{2}(1+\eta) \right] \left[\frac{1}{2}(1-\varsigma) \right] = \frac{1}{8}(1+\xi)(1+\eta)(1-\varsigma) \\
 N_4(\xi, \eta, \varsigma) &= \left[\frac{1}{2}(1-\xi) \right] \left[\frac{1}{2}(1+\eta) \right] \left[\frac{1}{2}(1-\varsigma) \right] = \frac{1}{8}(1-\xi)(1+\eta)(1-\varsigma) \\
 N_5(\xi, \eta, \varsigma) &= \left[\frac{1}{2}(1-\xi) \right] \left[\frac{1}{2}(1-\eta) \right] \left[\frac{1}{2}(1+\varsigma) \right] = \frac{1}{8}(1-\xi)(1-\eta)(1+\varsigma) \\
 N_6(\xi, \eta, \varsigma) &= \left[\frac{1}{2}(1+\xi) \right] \left[\frac{1}{2}(1-\eta) \right] \left[\frac{1}{2}(1+\varsigma) \right] = \frac{1}{8}(1+\xi)(1-\eta)(1+\varsigma) \\
 N_7(\xi, \eta, \varsigma) &= \left[\frac{1}{2}(1+\xi) \right] \left[\frac{1}{2}(1+\eta) \right] \left[\frac{1}{2}(1+\varsigma) \right] = \frac{1}{8}(1+\xi)(1+\eta)(1+\varsigma) \\
 N_8(\xi, \eta, \varsigma) &= \left[\frac{1}{2}(1-\xi) \right] \left[\frac{1}{2}(1+\eta) \right] \left[\frac{1}{2}(1+\varsigma) \right] = \frac{1}{8}(1-\xi)(1+\eta)(1+\varsigma)
 \end{aligned} \tag{3.8-1}$$

Diese Ansatzfunktionen enthalten in den lokalen Koordinaten genau die oben angegebenen Polynomterme (1, ξ , η , ζ , $\xi\eta$, $\eta\zeta$, $\zeta\xi$, $\xi\eta\zeta$). Die Summe der Formfunktionen

³⁹ Im englischen Sprachgebrauch als *brick element* bezeichnet.

(3.8-1) ergibt auch hier wieder den Wert 1, so daß eine Starrkörpertranslation zu keinen Spannungen führt. Die acht Ansatzfunktionen lassen sich kompakt in der Form

$$N_L(\xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{8}(1 + \xi_L \xi)(1 + \eta_L \eta)(1 + \zeta_L \zeta) \quad (3.8-2)$$

schreiben, wobei die (ξ_L, η_L, ζ_L) die lokalen Koordinaten der Knotenpunkte $L=1, \dots, 8$ sind mit $(\xi_L, \eta_L, \zeta_L \in [-1, 1])$. Analog zu Gleichung (3.6-4) läßt sich der Verschiebungsansatz in der Form

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \mathbf{N}(\xi, \eta, \zeta) \mathbf{v} = [\mathbf{I}N_1 \mid \dots \mid \mathbf{I}N_L \mid \dots \mid \mathbf{I}N_8] \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ w_1 \\ \vdots \\ u_8 \\ v_8 \\ w_8 \end{bmatrix}, \quad (3.8-3)$$

mit

$$\mathbf{I}N_L = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix} N_L(\xi, \eta, \zeta) \quad (3.8-4)$$

schreiben. Die weiteren Ableitungen folgen analog zur Darstellung in Abschnitt 3.6 und sollen hier nicht weiter vertieft werden.