<u>Matrizen / Tensoren</u> - Teil 2

J als Tensor

- Beim Versuch, den Drehimpuls unter Zuhilfenahme des Trägheitstensors darzustellen, ergab sich für das Trägheitsmoment der folgende Zusammenhang:

$$J = \int (\vec{r}^{\,2} - \vec{r} * \vec{r})dm$$ - auf doppelte Unterstreichung wird ab sofort verzichtet!

mit: $$(\vec{r} * \vec{r}) = \begin{pmatrix} x^2 & xy & xz \\ yx & y^2 & yz \\ zx & zy & z^2 \end{pmatrix}$$ - eine Matrix

$$\vec{r}^{\,2} = r^2 = x^2 + y^2 + z^2$$ - ein Skalar

- um Matrix und Skalar subtraktiv verknüpfen zu können, muss man den Skalar umschreiben
  ⇨ sinnvoll ist die Multiplikation des Skalars r^2 mit der sogenannten Einheitsmatrix:

$$r^2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r^2 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2+y^2+z^2 & 0 & 0 \\ 0 & x^2+y^2+z^2 & 0 \\ 0 & 0 & x^2+y^2+z^2 \end{pmatrix}$$

  ⇨ damit ergibt sich der Integrand als Differenz der beiden oben gezeigten Glieder:

$$(\vec{r}^{\,2} - \vec{r} * \vec{r}) = \begin{pmatrix} y^2+z^2 & -xy & -xz \\ -yx & x^2+z^2 & -yz \\ -zx & -zy & x^2+y^2 \end{pmatrix}$$

- die Matrix wird integriert, indem man über die einzelnen Matrixelemente integriert
  ⇨ das ergibt 9 Integrale; wegen der Symmetrie der Matrix sind aber nur 6 verschieden

  ⇨ nach der Integration ergibt sich:

$$J = \begin{pmatrix} J_{xx} & -J_{xy} & -J_{xz} \\ -J_{xy} & J_{yy} & -J_{yz} \\ -J_{zx} & -J_{zy} & J_{zz} \end{pmatrix}$$

- wie bereits im letzten Kapitel gesagt, lässt sich die Anzahl der Komponenten weiter reduzieren
  ⇨ das geschieht hier durch eine **Hauptachsentransformation**.

  *Es lässt sich zeigen, dass **jede symmetrische Matrix** in Hauptachsenform transformierbar ist.*

- Die Ausführung einer Hauptachsentransformation bedeutet am Beispiel des Kreisels natürlich nicht, dass sich z.B. Lagerbelastungen „rechnerisch beseitigen“ lassen - vielmehr werden mit einer Hauptachsentransformation Fragen beantwortet wie:
  - ➢ Wann werden Lagermomente = 0 ?
  - ➢ Wie liegen die Hauptträgheitsachsen?

Diagonalisierung symmetrischer Tensoren

- symmetrische Tensoren lassen sich durch eine geeignete Transformation stets in die Diagonalform überführen, so dass nur die Elemente in der Hauptdiagonalen $\neq 0$ sind und alle anderen verschwinden

- nehmen wir an, das ist beim Trägheitstensors J gelungen

  ⇨ dann ergibt sich in Diagonalform für den Drehimpuls

$$\vec{L} = J \cdot \vec{\omega} = \begin{pmatrix} J_x & 0 & 0 \\ 0 & J_y & 0 \\ 0 & 0 & J_z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_x \omega_x \\ J_y \omega_y \\ J_z \omega_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_x \\ L_y \\ L_z \end{pmatrix}$$

⇨ $$L_x = J_x \cdot \omega_x; \quad L_y = J_y \cdot \omega_y; \quad L_z = J_z \cdot \omega_z$$

➡ bei Drehung um eine der ausgezeichneten Achsen ergeben sich besonders einfache Ausdrücke; wir sprechen von **Hauptachsen** und **Hauptträgheitsmomenten**.

- für eine Drehbewegung <u>um eine dieser Hauptachsen</u> vereinfacht sich der Zusammenhang:

  aus **Drehimpuls = Trägheitstensor x Winkelgeschwindigkeit**

  wird eine einfache Multiplikation:

  Drehimpuls = Zahl x Vektorkomponente.

Eigenwerte und Eigenvektoren

- Mathematisch sind diese ausgezeichneten Richtungen durch die so genannten Eigenvektoren des Tensors / der Matrix gegeben.

  ⇨ das Problem läuft daher auf ein so genanntes „Eigenwertproblem“ hinaus:

> Ist A eine quadratische Matrix vom Typ (m,m), so besteht die Aufgabe darin, eine Zahl λ und einen dazugehörigen Vektor $\vec{x}$ $(\neq 0)$ zu finden, so dass gilt
>
> $$A \cdot \vec{x} = \lambda \cdot \vec{x}$$
>
> ⇨ λ heißt Eigenwert
>
> ⇨ $\vec{x}$ heißt Eigenvektor, wobei auch $c\vec{x}$ ein Eigenvektor ist.
> $\vec{x}$ darf definitionsgemäß nicht gleich dem Nullvektor sein.

- häufig zu finden ist dazu eine modifizierte Formulierung: $A \cdot \vec{x}_i = \lambda_i \cdot \vec{x}_i$
  - ⇨ hier wird zum Ausdruck gebracht, dass es sich bei dem zu lösenden Problem um eine Gleichung 3. Grades handelt, die **3 Lösungen** aufweist:
    verschiedene / mehrfache, reelle/ komplexe - aber eben 3 - daher λ_i
  - ⇨ daraus resultieren dann auch verschiedene Eigenvektoren - daher $\vec{x}_i$

- betrachten wir einen dieser Eigenwerte:
  - ⇨ ein Zahl λ heißt Eigenwert von A, wenn es einen (Spalten-)Vektor $\vec{x} \neq 0$ gibt mit
    $$A\vec{x} = \lambda\vec{x}$$
  - ⇨ d.h. $\vec{x}$ wird durch Multiplikation mit A auf das λ -fache seiner selbst abgebildet
  - ⇨ **jeder** Vektor $\vec{x} \neq 0$, der diese Gleichung erfüllt, heißt **Eigenvektor** von A zum Eigenwert λ

Beispiel:

- ➢ wie leicht zu sehen ist, gilt $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 4\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$
- ⇨ die Matrix streckt den Vektor auf das 4-fache; 4 ist **ein** Eigenwert der Matrix $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$
- ⇨ der zum Eigenwert $\lambda = 4$ gehörige Eigenvektor ist $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Bemerkung:

- ➢ auch die Zahl $\lambda = 0$ kann als Eigenwert auftreten
- ➢ für $\lambda = 0$ gibt es einen Vektor $\vec{x} \neq 0$ (den zugehörigen Eigenvektor), mit $A\vec{x} = 0$;
  die Aussage, dass $\vec{x}$ „von A auf das λ -fache seiner selbst abgebildet wird“ bedeutet für den Fall $\lambda = 0$, dass $\vec{x}$ „von A auf das 0 -fache seiner selbst abgebildet wird“ (also auf 0).

Beispiel:

- ➢ wie leicht zu sehen gilt $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$,
- ⇨ die Matrix „streckt“ den Vektor auf 0; es gilt $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 0\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$
- ⇨ daher ist 0 **ein** Eigenwert der Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$
- ⇨ der zum Eigenwert $\lambda = 0$ gehörige Eigenvektor ist $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

- wofür benötigen wir die Eigenwerte und Eigenvektoren von Matrizen?
  - ⇨ eine Matrix A verursacht eine lineare Abbildung des Vektors $\vec{x}$
  - ⇨ das kann eine Drehung, Spiegelung, Dehnung, Schrumpfung, Projektion o.ä. sein
  - ⇨ ein Eigenvektor gibt eine **Richtung** an, **in der** A **wie eine Multiplikation mit einem Skalar** (dem Eigenwert) **wirkt**.
  - ⇨ Kenntnis **aller** Eigenwerte und Eigenvektoren einer Matrix gibt in der Regel ein (oft auch ein geometrisches) Bild ihrer Wirkung

- übertragen auf unser Beispiel lautet das Problem: Gegeben sei eine symmetrische Matrix

$$J = \begin{pmatrix} J_{xx} & -J_{xy} & -J_{xz} \\ -J_{xy} & J_{yy} & -J_{yz} \\ -J_{zx} & -J_{zy} & J_{zz} \end{pmatrix}$$

⇨ gesucht sind die Eigenvektoren $\vec{\omega}_i = (\omega_{ix}, \omega_{iy}, \omega_{iz})$, für die gilt

$$J \cdot \vec{\omega}_i = \lambda_i \cdot \vec{\omega}_i$$

für die also die Matrixmultiplikation zur einfachen Skalarmultiplikation mit λ_i wird; die Faktoren λ_i nennt man die Eigenwerte der Matrix J.

- mit Hilfe der Einheitsmatrix

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

kann man die obige Gleichung in Form einer Matrixgleichung schreiben:

$$(J - \lambda \cdot E) \cdot \vec{\omega} = 0$$

oder ausgeschrieben

$$\begin{pmatrix} J_{xx} - \lambda & -J_{xy} & -J_{xz} \\ -J_{xy} & J_{yy} - \lambda & -J_{yz} \\ -J_{zx} & -J_{zy} & J_{zz} - \lambda \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} = 0 \qquad (*)$$

- dies stellt ausmultipliziert ein lineares, homogenes Gleichungssystem zur Bestimmung von $\vec{\omega}_i$ dar

$$\begin{aligned} (J_{xx} - \lambda) \cdot \omega_x + \quad -J_{xy} \cdot \omega_y + \quad -J_{xz} \cdot \omega_z &= 0 \\ -J_{xy} \cdot \omega_x + (J_{yy} - \lambda) \cdot \omega_y + \quad -J_{yz} \cdot \omega_z &= 0 \\ -J_{xz} \cdot \omega_x + \quad -J_{yz} \cdot \omega_y + (J_{zz} - \lambda) \cdot \omega_z &= 0 \end{aligned}$$

das Gleichungssystem erhält man auch, indem man das Produkt $J \cdot \vec{\omega}$ ausmultipliziert (ergibt einen Vektor), davon $\lambda \cdot \vec{\omega}$ abzieht und die Tatsache nutzt, dass ein Vektor gleich Null ist, wenn alle 3 Komponenten gleich Null sind.

- Dieses homogene Gleichungssystem besitzt nur dann eine von der trivialen und uninteressanten Lösung $\vec{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3) = (0,0,0)$ verschiedene Lösung, wenn die Determinante der Koeffizienten verschwindet.

(Wir hatten im Abschnitt „Determinanten und Matrizen“ festgestellt, dass die für eine Lösung des Gleichungssystems wichtigen Determinanten D_1, D_2, D_3 gleich Null sind, wenn eine ihrer Spalten Null ist. Das ist hier der Fall - eine sinnvolle Lösung ist also nur möglich, wenn auch $D = 0$ ist; **Cramersche Regel** !).

$$\begin{vmatrix} J_{xx} - \lambda & -J_{xy} & -J_{xz} \\ -J_{xy} & J_{yy} - \lambda & -J_{yz} \\ -J_{zx} & -J_{zy} & J_{zz} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \qquad \text{oder} \qquad \det(J - \lambda \cdot E) = 0$$

- das ist eine Gleichung 3. Grades zur Bestimmung der λ_i
  - ⇨ diese so genannte charakteristische Gleichung besitzt genau drei Lösungen $\lambda_i = J_1, J_2, J_3$, die oben (∗) eingesetzt genau drei **Eigenvektoren** $\vec{\omega}_i = (\omega_{ix}, \omega_{iy}, \omega_{iz})$ liefern
  - ⇨ im Falle des Trägheitstensors sind das die ausgezeichneten Drehrichtungen und die Eigenwerte dazu sind die Hauptträgheitsmomente

- die diagonalisierte Matrix $\underline{\underline{J}}^{(d)}$ des Tensors ist dann

$$J^{(d)} = \begin{pmatrix} J_1 & 0 & 0 \\ 0 & J_2 & 0 \\ 0 & 0 & J_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_x & 0 & 0 \\ 0 & J_y & 0 \\ 0 & 0 & J_z \end{pmatrix}$$

Damit ist <u>ein</u> Ziel unserer Bemühungen erreicht.
Wir haben die diagonalisierte Form des Trägheitstensors und damit die Hauptträgheitsmomente gefunden.

- die Matrizen J und $J^{(d)}$ beschreiben die gleiche physikalische Eigenschaft (hier den Trägheitstensor), jedoch in verschiedenen, gegeneinander verdrehten Koordinatensystemen.

- das Eigenwertproblem ist also gleichbedeutend mit der Aufgabe, das Koordinatensystems so zu drehen, dass der Tensor J in die Form $J^{(d)}$ überführt wird.

  Eine solche Drehung des Koordinatensystems lässt sich mit einer 3 x 3 **Transformations-Matrix** beschreiben. Die Zeilen und Spaltenvektoren dieser **orthogonale Matrix** sind orthonormiert (Betrag = 1 ; alle senkrecht zueinander).

- hat man die Transformationsmatrix T gefunden, dann gilt $J^{(d)} = T^{-1} \cdot J \cdot T$.

- die gesuchte Transformationsmatrix T ergibt sich aus dem Eigenwertproblem;
  T ist die aus den Komponenten der **Eigenvektoren** gebildete Matrix.

- dies erkennt man, wenn man die Gleichung $J \cdot \vec{\omega}_i = \lambda_i \cdot \vec{\omega}_i$ für die drei gefundenen Eigenvektoren aufschreibt:

$$J \cdot \vec{\omega}_1 = J_x \cdot \vec{\omega}_1$$
$$J \cdot \vec{\omega}_2 = J_y \cdot \vec{\omega}_2$$
$$J \cdot \vec{\omega}_3 = J_z \cdot \vec{\omega}_3$$

  mit $\vec{\omega}_1 = (\omega_{1x}, \omega_{1y}, \omega_{1z}),\ \vec{\omega}_2 = (\omega_{2x}, \omega_{2y}, \omega_{2z}),\ \vec{\omega}_3 = (\omega_{3x}, \omega_{3y}, \omega_{3z})$
  hat man also in ausgeschriebener Form:

$$J \cdot \begin{pmatrix} \omega_{1x} \\ \omega_{1y} \\ \omega_{1z} \end{pmatrix} = J_x \cdot \begin{pmatrix} \omega_{1x} \\ \omega_{1y} \\ \omega_{1z} \end{pmatrix}; \qquad J \cdot \begin{pmatrix} \omega_{2x} \\ \omega_{2y} \\ \omega_{2z} \end{pmatrix} = J_y \cdot \begin{pmatrix} \omega_{2x} \\ \omega_{2y} \\ \omega_{2z} \end{pmatrix}; \qquad J \cdot \begin{pmatrix} \omega_{3x} \\ \omega_{3y} \\ \omega_{3z} \end{pmatrix} = J_z \cdot \begin{pmatrix} \omega_{3x} \\ \omega_{3y} \\ \omega_{3z} \end{pmatrix}$$

- multipliziert man die Matrix J jeweils mit einem der Eigenvektoren $\vec{\omega}_i$ (in Spaltenform), erhält man auf der rechten Seite wieder den Eigenvektor in Spaltenform, multipliziert mit dem zugehörigen Eigenwert ($\lambda_i = J_x, J_y, J_z$)

- die Gleichungen lassen sich zu einer einzigen Matrixgleichung zusammenfassen:

$$J \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} \omega_{1x} & \omega_{2x} & \omega_{3x} \\ \omega_{1y} & \omega_{2y} & \omega_{3y} \\ \omega_{1z} & \omega_{2z} & \omega_{3z} \end{pmatrix}}_{\omega} = \begin{pmatrix} J_x\omega_{1x} & J_y\omega_{2x} & J_z\omega_{3x} \\ J_x\omega_{1y} & J_y\omega_{2y} & J_z\omega_{3y} \\ J_x\omega_{1z} & J_y\omega_{2z} & J_z\omega_{3z} \end{pmatrix} =$$

$$= \underbrace{\begin{pmatrix} \omega_{1x} & \omega_{2x} & \omega_{3x} \\ \omega_{1y} & \omega_{2y} & \omega_{3y} \\ \omega_{1z} & \omega_{2z} & \omega_{3z} \end{pmatrix}}_{\omega} \cdot \begin{pmatrix} J_x & 0 & 0 \\ 0 & J_y & 0 \\ 0 & 0 & J_z \end{pmatrix}$$

  oder kürzer zusammengefasst:

$$J \cdot \omega = \omega \cdot J^{(d)}$$

- Diese Gleichung braucht man nun mir noch von links mit ω^{-1} zu multiplizieren, um das Endergebnis zu erhalten:

$$J^{(d)} = \omega^{-1} \cdot J \cdot \omega$$

- die mit den (normierten) Eigenvektoren $\vec{\omega}_i$ als Spaltenvektoren gebildete Matrix ω ist die gesuchte Transformationsmatrix T:

$$T = \omega$$