Tensoren

Dyadisches Produkt zwischen zwei Vektoren

Zusammenhang Drehimpuls ⇔ Winkelgeschwindigkeit eines rotierenden starren Körpers:

- Drehimpuls $\vec{L}$ und Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$ liegen nicht zwingend in gleicher Richtung.

$$\vec{L} = \int \vec{r} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) dm = \int \left\{ \vec{r}^{\,2} \cdot \vec{\omega} - \vec{r} \cdot (\vec{r} \cdot \vec{\omega}) \right\} dm$$

- Drehimpulsvektor $\vec{L}$ hat Komponente parallel zu $\vec{\omega}$ und Komponente parallel zu $\vec{r}$.
- Möchte man den üblichen Zusammenhang $\vec{L} = J \cdot \vec{\omega}$ herstellen
  ⇨ modifizierte Beziehung: $\vec{L} = \underline{\underline{J}} \cdot \vec{\omega}$

➡ Fallen die beiden Vektoren $\vec{L}$ und $\vec{\omega}$ bezüglich ihrer Richtung nicht mehr zusammen, muss $\underline{\underline{J}}$ einen Zusammenhang sowohl zwischen den Beträgen der Größen, als auch ihren Richtungen her-stellen.
Diese Aufgabe erfüllt ein Tensor.

- Trägheits-**Tensor** $\underline{\underline{J}}$ (doppelte Unterstreichung).

• **Tensoren** sind mathematische Operatoren mit bestimmten Eigenschaften.
  ⇨ Besonders interessieren Tensoren vom Rang 2.
  (Tensoren vom Rang 0 sind Skalare, Tensoren vom Rang 1 sind Vektoren.)
  ⇨ Ein wesentliches Merkmal der Tensoren ist die Invarianz gegenüber einem Wechsel des Koordinatensystems (auch Invarianz gegenüber Koordinatentransformation genannt).
  ⇨ Bei Benutzung eines Koordinatensystems lassen sich Tensoren durch **Matrizen** beschreiben; Vektoren beschreibt man mit einzeiligen oder einspaltigen Matrizen, Tensoren vom Rang 2 durch Matrizen mit 3 Zeilen und 3 Spalten (3 x 3 Matrizen).

  ⇨ Ist jede quadratische Matrix ein Tensor?
  NEIN.
  - Eine Matrix kann mehrdeutig interpretiert werden: als lineare Abbildung, linearer Operator, Koeffzientenmatrix eines Gleichungssystems, etc.
  - nicht jede quadratische Matrix transformiert sich wie ein Tensor

• Betrachten wir das Integral für $\vec{L}$:
  - Ausklammern von $\vec{\omega}$ ist im ersten Summanden unter dem Integral problemlos möglich.

  - Schwieriger ist das im 2. Summanden.
    ⇨ Der Summand hat die Richtung von $\vec{r}$.
    ⇨ Klammert man $\vec{\omega}$ aus, muss gewährleistet sein, dass die erneute Multiplikation des verbleibenden Restes mit $\vec{\omega}$ wieder die Richtung von $\vec{r}$ ergibt.

- Diese Forderung erfüllt das **dyadische Produkt (Dyade)** $\vec{r} * \vec{r}$ oder allgemein $\vec{a} * \vec{b}$ zweier 3-komponentiger Vektoren $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ und $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$.

  ⇨ führt auf einen **Tensor 2. Stufe**.
  ⇨ 9 Komponenten (geordnete Produkte a_i mit b_k), dargestellt als Matrix

  ⇨ Multiplikationszeichen:
  Stern $*$ oder zwei gegeneinander gestellte runde Klammern)(

  ⇨ der Tensor $\underline{\underline{A}}$ des dyadischen Produkts lautet also:

$$\underline{\underline{A}} = \vec{a})(\vec{b} = \vec{a} * \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 b_1 & a_1 b_2 & a_1 b_3 \\ a_2 b_1 & a_2 b_2 & a_2 b_3 \\ a_3 b_1 & a_3 b_2 & a_3 b_3 \end{pmatrix}$$

  Komponenten: Matrix mit den Elementen $A_{ik} = a_i b_k$.

Summen, Differenzen und Produkte von Tensoren

- Mit einem „Tensor 2. Stufe" lässt sich rechnen wie mit Matrizen – aber nicht jede quadratische Matrix ist ein Tensor (s.o.).
  Gewisse Parallelen gibt es zum Rechnen mit Vektoren ⇨ diese werden oft „Tensor 1. Stufe" genannt.

- **Summe bzw. Differenz** zweier Tensoren
  ⇨ wird analog zu den Vektoren definiert
  ⇨ Bildung der Summen bzw. Differenzen gleichgestellter Komponenten:

$$\boxed{\begin{aligned} \underline{\underline{C}} &= \underline{\underline{A}} \pm \underline{\underline{B}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} \\ \underline{\underline{C}} &= \begin{pmatrix} a_{11} \pm b_{11} & a_{12} \pm b_{12} & a_{13} \pm b_{13} \\ a_{21} \pm b_{21} & \hat{a}_{22} \pm b_{22} & a_{23} \pm b_{23} \\ a_{31} \pm b_{31} & a_{32} \pm b_{32} & a_{33} \pm b_{33} \end{pmatrix} \end{aligned}}$$

  oder kürzer:

$$\boxed{\underline{\underline{C}} = \underline{\underline{A}} \pm \underline{\underline{B}} \quad \leftrightarrow \quad c_{ik} = a_{ik} \pm b_{ik} \quad (i, k = 1,2,3)}$$

  mit c_{ik} den Elementen der Matrix des Tensors $\underline{\underline{C}}$.

- **Multiplikation eines Tensors mit einem Skalar λ**
  ⇨ jedes Element wird mit diesem Faktor multipliziert.

$$\boxed{\underline{\underline{C}} = \lambda \cdot \underline{\underline{B}} \qquad \leftrightarrow \qquad c_{ik} = \lambda \cdot b_{ik} \qquad (i,k = 1,2,3)}$$

- **Multiplikation zweier zweistufiger Tensoren miteinander**
  ⇨ ähnlich wie bei Multiplikation zwischen zwei Vektoren:
  existieren verschiedene Möglichkeiten – je nach Verwendungszweck
  ⇨ beispielsweise folgende:

  - **Tensor mal Tensor = Skalar**
    ⇨ auch hier existieren verschiedene Möglichkeiten - etwa:

1. Multiplikation aller gleichgestellten Komponenten
mit nachfolgender Addition aller Produkte.

$$\boxed{\underline{\underline{A}} \circ \underline{\underline{B}} = \sum_{i,k=1}^{3} a_{ik} \cdot b_{ik} = Skalar}$$

vergleichbar mit dem Skalarprodukt zweier Vektoren $\vec{a} \cdot \vec{b} = \sum_{i=1}^{3} a_i \cdot b_i = Skalar$

2. Multiplikation der Elemente in den Zeilen des ersten Tensors mit den
entsprechenden Elementen in den Spalten des zweiten Tensors aufaddieren:

$$\boxed{\underline{\underline{A}} \bullet \underline{\underline{B}} = \sum_{i,k=1}^{3} a_{ik} \cdot b_{ki} = Skalar}$$

- wird z. B. bei der Berechnung der Energiedichte ρ_{elast} des elastischen Feldes

unter Verwendung des Spannungstensors $\underline{\underline{\sigma}}$ und des Dehnungstensors $\underline{\underline{\varepsilon}}$

in der Kontinuumsmechanik benutzt.

  - **Tensor mal Tensor = Tensor (alle von zweiter Stufe)**

$$\boxed{\underline{\underline{C}} = \underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{B}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} = (c_{ik})}$$

Hier wird die gewöhnliche Matrixmultiplikation genutzt
- aus zwei 3 x 3-Matrizen wird wieder eine 3 x 3-Matrix
- die Zeilen der ersten Matrix werden mit den Spalten der zweiten Matrix multipliziert

- **Tensor mal Tensor (jeweils 2. Stufe) = Tensor 4. Stufe**

  Dieses Produkt hat Ähnlichkeit mit dem dyadischen Produkt zwischen zwei Vektoren: es werden sämtliche Produkte aller Elemente gebildet.
  Man kommt im Falle der Tensoren (Matrizen) zu einem Gebilde mit 9 x 9 = 81 = 3^4 Komponenten - Tensor 4. Stufe.

  Wenn a_{ik} die Elemente des ersten Tensors $\underline{\underline{A}}$ und b_{lm} diejenigen von $\underline{\underline{B}}$ sind, dann ergibt sich:

  $$\boxed{\underline{\underline{\underline{\underline{C}}}} = \underline{\underline{A}} * \underline{\underline{B}} \qquad \leftrightarrow \qquad c_{iklm} = a_{ik} \cdot b_{lm}}$$

  Eine Darstellung in einer Matrix ist hierbei nicht mehr möglich.

  Das sei ein erster Eindruck, der vielleicht Kreiselbewegungen und Lagerbelastungen bei Drehbewegungen verständlich macht.
  Interessant sind dafür auch Produkte von Tensoren mit Vektoren.

- **Produkte von Tensoren mit Vektoren**

Produkt **Vektors mal Tensor** ist Produkt zweier Matrizen.

➢ Tensor kann als 3 x 3 – Matrix aufgefasst werden;

➢ Vektor $\Rightarrow$ einspaltige oder einzeilige Matrix.

Warum Unterscheidung einzeilig / einspaltig?

⇨ Nach Gesetzen der **Matrix-Multiplikation** gilt:
Ist $A = (a_{ij})$ eine (m,n) - Matrix und $B = (b_{jk})$ eine (n,r) - Matrix,

so ist $A \cdot B = (c_{ik})$ - eine (m,r) - Matrix mit $c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot b_{jk}$ für $i = 1 \ldots m$, $k = 1 \ldots r$

c_{ik} ist das Skalarprodukt der i -ten Zeile von A mit der k -ten Spalte von B.

Es muss also die Spaltenzahl von *A* mit der Zeilenzahl von *B* übereinstimmen.
***A* und *B* müssen zueinander passen !**

⇨ Multipliziert man den Tensor von links mit einem Vektor, kann dieser nur in Zeilenform geschrieben werden
(Spaltenzahl des Vektors: 3 = Zeilenzahl der Tensor-Matrix: 3)

⇨ Multipliziert man dagegen den Tensor von rechts mit einem Vektor, kann dieser nur in Spaltenform geschrieben werden
(Spaltenzahl der Tensor-Matrix:3 = Zeilenzahl des Vektors:3)

Wichtigste Produktform: **Tensors mal Vektor = Vektor**

$$\boxed{\vec{c} = \underline{\underline{A}} \cdot \vec{b} \qquad \leftrightarrow \qquad Tensor \cdot Vektor = Vektor}$$

- entspricht einer Abbildung des Vektors $\vec{b}$ auf den Vektor $\vec{c}$ mittels Abbildungs-Matrix $\underline{\underline{A}}$.
- ist Multiplikation einer 3 x 3-Matrix mit Spaltenvektor ($\vec{b}$).

$$\vec{c} = \underline{\underline{A}} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_1 + a_{12}b_2 + a_{13}b_3 \\ a_{21}b_1 + a_{22}b_2 + a_{23}b_3 \\ a_{31}b_1 + a_{32}b_2 + a_{33}b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\vec{c} = \underline{\underline{A}} \cdot \vec{b} \qquad \leftrightarrow \qquad c_i = \sum_{k=1}^{3} a_{ik} \cdot b_k}$$

➡ **Ergebnis:** Spaltenvektor.

⇨ unmittelbare Parallele zur Rotation eines starren Körpers: $\vec{L} = \underline{\underline{J}} \cdot \vec{\omega}$

Tensor	mal	Spaltenvektor	ist	Spaltenvektor
$\underline{\underline{J}}$	**mal**	$\vec{\omega} = \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix}$	**ist**	$\vec{L} = \begin{pmatrix} Lx \\ Ly \\ Lz \end{pmatrix}$

Das beschriebene Produkt ist *nicht kommutativ* !

$$\vec{d} = \vec{b} \cdot \underline{\underline{A}} \quad \neq \quad \vec{c} = \underline{\underline{A}} \cdot \vec{b}$$

⇨ Konsequenz, dass sich eine Multiplikation des Tensors mit einem Vektor von rechts oder links unterscheiden !

- Multiplikation $\vec{d} = \vec{b} \cdot \underline{\underline{A}}$ ⇨ $\vec{b}$ als <u>Zeilenvektor</u>.

$$\vec{d} = \vec{b} \cdot \underline{\underline{A}} = (b_1, b_2, b_3) \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$
$$= (a_{11}b_1 + a_{21}b_2 + a_{31}b_3, \; a_{12}b_1 + a_{22}b_2 + a_{32}b_3, \quad a_{13}b_1 + a_{23}b_2 + a_{33}b_3)$$

$$\boxed{\vec{d} = \vec{b} \cdot \underline{\underline{A}} \qquad \leftrightarrow \qquad d_k = \sum_{k=1}^{3} b_i \cdot a_{ik}}$$

➡ **zu erkennen:** $\vec{c}$ und $\vec{d}$ sind voneinander verschieden!

physikalische Beispiele:

- Berechnung des Drehimpulses bei der Rotation eines starren Körpers genannt.
- Maxwell-Gleichung $\vec{D} = \underline{\underline{\varepsilon}} \cdot \varepsilon_0 \cdot \vec{E}$

  Beziehung zwischen elektrischer Feldstärke $\vec{E}$ und dielektrischer Verschiebung $\vec{D}$,
  wenn das polarisierbare Medium anisotrop ist und die „Dielektrizitätskonstante“ als Tensor geschrieben werden muss.

Bemerkung:
Wir haben gesehen, dass die uns interessierenden Tensoren 2. Stufe
neun Komponenten haben.

In speziellen Fällen kann sich deren Zahl jedoch reduzieren:

- Im Falle a**ntisymmetrischer Tensoren** existieren nur drei von Null verschiedene Komponenten. Wegen der Antisymmetriebedingung $a_{ik} = -a_{ki}$ werden die Hauptdiagonalelemente alle Null, und die Außerdiagonalelemente sind paarweise entgegengesetzt gleich.

- **Symmetrische Tensoren** besitzen sechs von Null verschiedene Komponenten. Wegen der Symmetriebedingung $a_{ik} = a_{ki}$ sind die 3 Elemente in der Hauptdiagonalen und 3 außerhalb der Hauptdiagonalen ungleich Null.

- Besonders interessant und eng mit den symmetrischen Tensoren verknüpft sind die **diagonalen Tensoren;**
  bei denen die drei Komponenten in der Hauptdiagonalen ungleich Null sind.