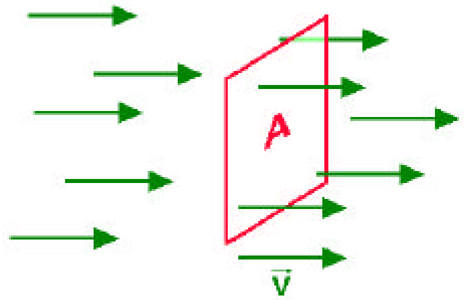
Oberflächenintegrale

Vektorfluß durch eine Fläche

- betrachtet wird ein homogenes Vektorfeld $\vec{v}$ (z.B. Lichtbündel)

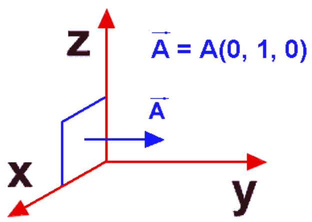
- das Licht falle auf einen Spalt
  $\Delta A = \Delta x \cdot \Delta y$

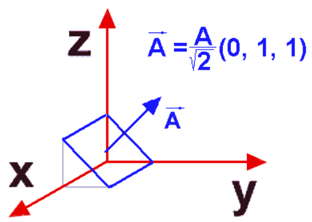


Definition:
Unter dem vektoriellen Flächenelement einer ebnen Fläche A versteht man einen Vektor $\vec{A}$ der senkrecht auf der Fläche steht und dessen Betrag gleich A ist. $|\vec{A}| = A$

Das Vorzeichen wird per Konvention festgelegt; in unserem Falle ist es günstig, das Vorzeichen so festzulegen, daß $\vec{A}$ in die Richtung zeigt, in welcher der Strom aus der Fläche austritt.

Beispiele:





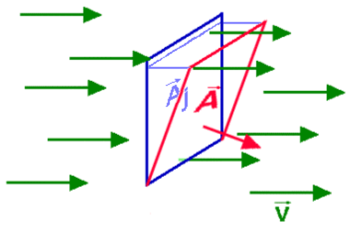
Frage: Wirkt sich eine Neigung des Spaltes auf die hindurchtretende Lichtmenge aus ?

$\Delta\vec{A} = \Delta x\,\vec{e}_x \cdot \Delta y\,\vec{e}_y = \Delta x \cdot \Delta y \cdot \vec{e}_z$

Flächenvektor steht senkrecht auf der Fläche!

hindurchtretende Lichtmenge:

$J = \vec{v} \cdot \Delta\vec{A} = V_z \cdot \Delta x \cdot \Delta y$ (V_z – z-Komponente von J)



Durch die beliebig in den Lichtstrom gelegte Fläche tritt genausoviel Licht, wie durch die Projektion A_j.

Definition:
Gegeben sei eine ebene Fläche A und ein homogenes Vektorfeld $\vec{v}$.
Das skalare Produkt von $\vec{v}$ mit dem vektoriellen Flächenelement $\vec{A}$ wird dann bezeichnet als Fluß des Vektorfeldes $\vec{v}$ durch die Fläche A.

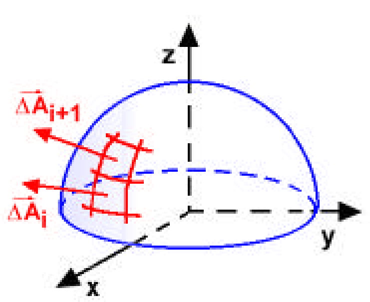
Oberflächenintegral

Bisher galten bei Betrachtung des Flusses 2 Einschränkungen:

- das Vektorfeld sollte homogen sein,
- die Fläche sollte eben sein.

Diese Einschränkungen lassen wir fallen.

Frage: Wie berechnet sich bei einem beliebigen Vektorfeld $\vec{F}$ und einer gekrümmten Fläche A der Fluß von $\vec{F}$ durch A?

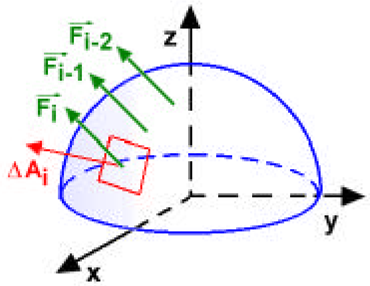


Näherung:

- Zerlegung von A in Teilflächen DA_i.
- Sind die Flächenelemente klein genug, kann man sie als eben auffassen und jedem ΔA_i ein vektorielles Flächenelement $\Delta\vec{A}_i$ zuordnen mit $\left|\Delta\vec{A}_i\right| = \Delta A_i$.
- Im Bereich der Teilflächen DA_i nehmen wir $\vec{F}$ als homogen an.

Der Fluß $\vec{F}$ durch DA_i ist dann Näherungsweise gegeben durch

$$\vec{F}(x_i, y_i, z_i) \cdot \Delta\vec{A}_i$$



Ein Näherungsausdruck für den gesamten Fluß $\vec{F}$ durch die Fläche **A** erhält man durch Addition der Teilflüsse durch die Flächen DA_i :

$$\text{Fluß } \vec{F} \text{ durch } \mathbf{A} \quad \approx \sum_{i=1}^{n} \vec{F}(x_i, y_i, z_i) \cdot \Delta\vec{A}_i$$

- Verfeinerung der Teilflächen DA_i
- Grenzwert n $\to \infty$ ergibt den genauen Wert

Diesen Grenzwert nennt man **Oberflächenintegral**

$$\text{Fluß } \vec{F} \text{ durch } \mathbf{A} \quad = \int_A \vec{F}(x, y, z) \cdot d\vec{A}$$

Definition:

Oberflächenintegral von $\vec{F}(x, y, z)$ über die Fläche A oder Fluß von $\vec{F}$ durch A:

$$\int_A \vec{F}(x, y, z) \cdot d\vec{A} = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} \vec{F}(x_i, y_i, z_i) \cdot \Delta\vec{A}_i$$

- häufige Anwendung:
  Oberflächenintegral über eine geschlossene Fläche.

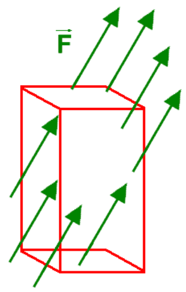
Definition:
Eine geschlossene Fläche zerlegt den Raum derart in zwei Teilräume, daß man die Fläche durchstoßen muß, um von einem Teilraum in den anderen zu gelangen.

- Oberflächenintegral über geschlossene Flächen wird symbolisch mit einem Kreis durch das Integralzeichen dargestellt
- Das Vorzeichen des vektoriellen Flächenelements wird so festgelegt, daß $d\vec{A}$ nach außen zeigt.

Berechnung des Oberflächenintegrals für Spezialfälle

Fluß eines homogenes Feldes durch einen Quader

- homogenes Vektorfeld $\vec{F} = (F_x, F_y, F_z)$
- zur Berechnung Zerlegung in 6 Teilintegrale (entsprechend der Quaderflächen)



$$\vec{A}_1 = ab\,(0,0,1) \qquad \vec{A}_2 = ab\,(0,0,-1)$$
$$\vec{A}_3 = ac\,(0,1,0) \qquad \vec{A}_4 = ac\,(0,-1,0)$$
$$\vec{A}_5 = bc\,(1,0,0) \qquad \vec{A}_6 = bc\,(-1,0,0)$$

Das Oberflächenintegral eines homogenen Vektorfeldes $\vec{F}$ durch eine ebne Fläche $\vec{A}$ ist gegeben durch das Skalarprodukt $\vec{F} \cdot \vec{A}$. Daraus ergeben sich die 6 Teilflüsse:

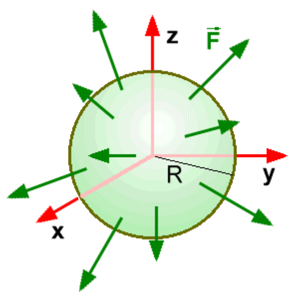
$$\vec{F}\cdot\vec{A}_1 = ab\cdot F_z \qquad \vec{F}\cdot\vec{A}_2 = -\,ab\cdot F_z \qquad \vec{F}\cdot\vec{A}_3 = ac\cdot F_y$$
$$\vec{F}\cdot\vec{A}_4 = -\,ac\cdot F_y \qquad \vec{F}\cdot\vec{A}_5 = bc\cdot F_x \qquad \vec{F}\cdot\vec{A}_6 = -\,bc\cdot F_x$$

Damit ergibt sich der Gesamtfluß durch die Fläche: $= \sum_{i=1}^{6} \vec{F}\cdot\vec{A} = 0$

Der Fluß eines homogenen Feldes $\vec{F}$ durch eine beliebige geschlossene Fläche verschwindet.

Fluß eines radialsymmetrischen Feldes durch eine Kugeloberfläche

- radialsymmetrisches Feld: $\vec{F} = \vec{e}_r \cdot f(r)$ mit $\vec{e}_r = \dfrac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$
- der Kugelmittelpunkt sei gleichzeitig Koordinatenursprung



Das Flächenelement $d\vec{A}$ steht senkrecht auf der Kugeloberfläche, ist also parallel zu $\vec{r}$.

Þ $\oint_A \vec{F}\cdot d\vec{A} = \oint_A f(r)\cdot\vec{e}_r\cdot d\vec{A} = \oint_A f(r)\cdot dA$

Integration erfolgt für **r = R**

Þ $\oint_A f(r)\cdot dA = \oint_A f(R)\cdot dA = f(R)\cdot\oint_A dA$

mit $\oint_A dA = 4p\cdot R^2$ folgt:

Der Fluß eines radialsymmetrischen Feldes $\vec{F} = f(r)\cdot\vec{e}_r$ durch eine Kugeloberfläche mit dem Radius R ist: $$\oint_A \vec{F}\cdot d\vec{A} = 4p\cdot R^2\cdot f(R)$$

Beispiel: Feld einer punktförmigen Ladung Q im Koordinatenursprung

$$\vec{E}(x,y,z)=\frac{Q\cdot\vec{e}_r}{4p\,e_0\,r^2}=Q\frac{(x,y,z)}{4p\,e_0\,r^3} \quad \text{mit} \quad r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

Þ $$\oint_A \vec{E}\cdot d\vec{A}=4p\cdot f(R)\cdot R^2=\frac{Q}{e_0} \qquad \textbf{Gaußsches Gesetz}$$

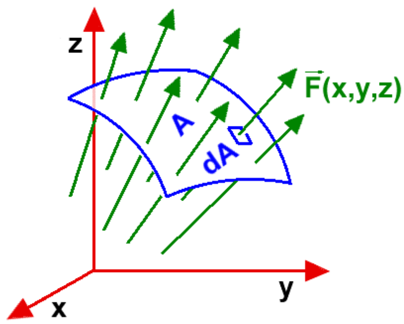
Fluß des el. Feldes unabhängig von R! (Gilt für alle geschlossenen Flächen)

Berechnung des Oberflächenintegrals im allgemeinen Fall

Gegeben sei Oberflächenintegral

$$\int_A \vec{F}(x,y,z)\cdot d\vec{A}$$

$$=\int_A \left[F_x dA_x + F_y dA_y + F_z dA_z\right]$$



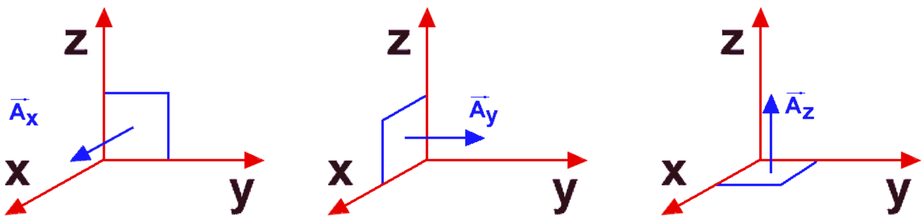
2 Fragen :

1. Wie sehen die Komponenten dA_x, dA_y, dA_z des „differentiellen“ Flächenvektors $d\vec{A}$ aus?

2. Wie berücksichtigt man den durch die Fläche A vorgegebenen Integrationsbereich?

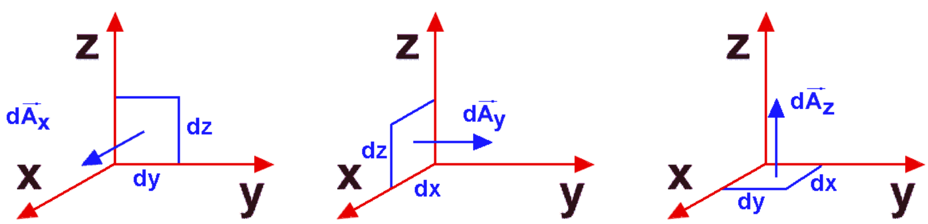
Komponenten dA_x, dA_y, dA_z des „differentiellen“ Flächenvektors $d\vec{A}$

- Einheitsvektoren in Richtung der Flächenelemente:



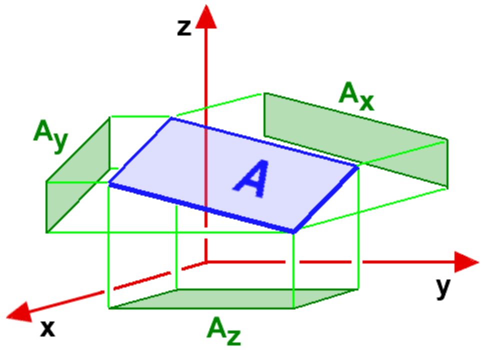
Die Komponenten A_x, A_y, A_z eines Flächenvektors $\vec{A}$ sind die entsprechenden Projektionen der Fläche.

Für die Komponenten dA_x, dA_y, dA_z des differentiellen Flächenelements $d\vec{A}$ erhält man: $dA_x = dy\,dz$, $dA_y = dx\,dz$, $dA_z = dx\,dy$



Die Flächen, auf denen die Vektoren senkrecht stehen sind keine Quadrate (mit Flächeninhalt 1) mehr, sondern differentielle Flächen *dydz, dxdz, dxdy.*

$\Rightarrow \qquad d\vec{A} = (dydz, dxdz, dxdy)$.



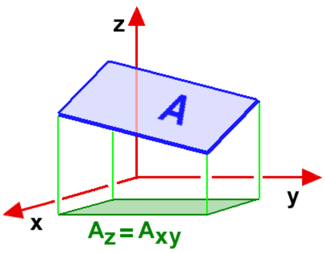
Integrationsbereich, der durch die Fläche A vorgegeben wird:

Das betrachtete Oberflächenintegral war:

$$\int_A \vec{F}(x,y,z)\cdot d\vec{A} = \int_A \left[F_x dA_x + F_y dA_y + F_z dA_z\right] = \int_A F_x dA_x + \int_A F_y dA_y + \int_A F_z dA_z$$

betrachten wir den 3. Summanden:

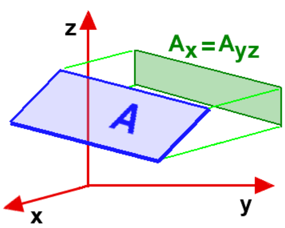
$$\int_A F_z dA_z = \int_A F_z dxdy$$

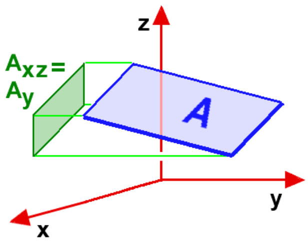


Welche Werte haben x und y zu durchlaufen?

Es ist genau die Fläche, die sich aus der Projektion von A auf die x-y-Ebene ergibt.

Analoges ergibt sich für die beiden anderen Projektionen:





daraus ergibt sich letztendlich:

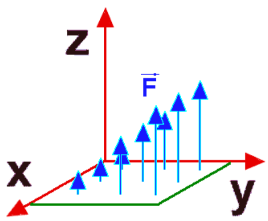
$$\int_A \vec{F}(x,y,z)\cdot d\vec{A} = \int_{A_{yz}} F_x dA_x + \int_{A_{xz}} F_y dA_y + \int_{A_{xy}} F_z dA_z$$

Beispiel:

Gegeben ist das nichthomogene Vektorfeld $\vec{F} = (0,0,y)$.

Gesucht ist der Fluß des Vektors $\vec{F}$ durch ein Rechteck, welches durch die Vektoren (a,0,0) und (0,b,0) aufgespannt wird.

$$\int \vec{F}\cdot d\vec{A} = \int_{x=0}^{a} \int_{y=0}^{b} y\cdot dxdy = \frac{a\cdot b^2}{2}$$



Bei Vergrößerung der Fläche in y-Richtung steigt der Fluß quadratisch; bei Vergrößerung der Fläche in Richtung x steigt er linear.