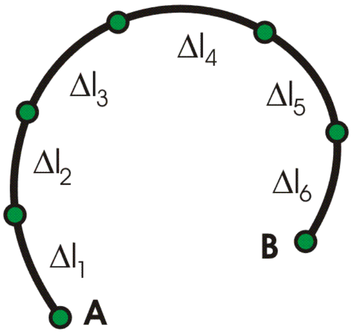
Das Linienintegral

Länge eines Kurvenzuges



Die Länge einer Geraden ist allgemein bei Kenntnis von Anfangs- und Endkoordinaten leicht zu bestimmen. Komplizierter ist die Bestimmung der Länge eines Kurvenzuges wie z.B. einer Wurfparabel oder einer
Spiralfeder.

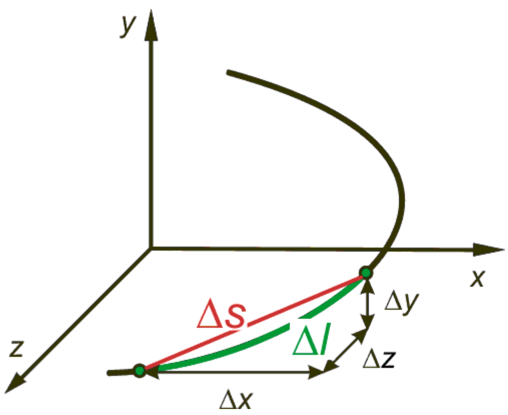
Die übliche Vorgehensweise zur Bestimmung der Länge l einer solchen Kurve ist es, diese in Teilstücke Δl zu zerlegen und aufzusummieren.

$$l = \sum_{i=1}^{n} \Delta l_i$$

Der Grenzübergang mit $\Delta l_i \to 0$ führt zum Linienintegral und zur gesuchten Länge des Bogenstücks.

$$l = \int_A^B dl$$

Die Berechnung des Integrals sei hier am Beispiel einer **Funktion in Parameterdarstellung** gezeigt.



Es liegen also vor: $x = x(t);\ \ y = y(t);\ \ z = z(t)$
wie z.B. die Koordinaten eines geworfenen Körpers als Funktion der Zeit.

Damit gilt:

$$\Delta l \approx \Delta s = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2}$$

$$\Delta l \approx \sqrt{\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{\Delta z}{\Delta t}\right)^2} \cdot \Delta t$$

Vollzieht man den Grenzübergang $\Delta t \to dt$, ergibt sich:

$$dl = \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2 + \dot{z}(t)^2} \cdot dt$$

Die gesuchte Länge der Kurve von Punkt A bis Punkt B ergibt sich durch Integration über dl in den vorgegebenen Grenzen für den Parameter t.

$$L = \int_A^B dl = \int_A^B \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2 + \dot{z}(t)^2} \cdot dt$$

Nun muss das Integral „nur noch“ ausgerechnet werden.

Leider ist die betrachtete Funktion nicht immer in Parameterform gegeben.

- Ausweg 1: Parameterform finden $\Rightarrow$ kann recht kompliziert werden

- Ausweg 2: Man verwendet x selbst als Parameter;

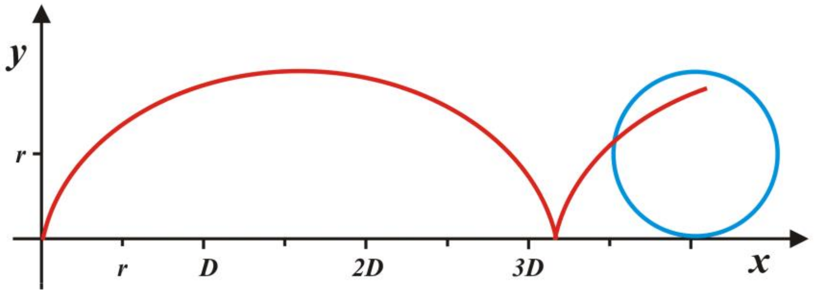
Das erweist sich im zweidimensionalen Fall als recht praktikabel;
$\Rightarrow$ $t = x$ $\Rightarrow$ $y(t) = y(x)$

$\Rightarrow$ aus $$L = \int_A^B dl = \int_A^B \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2} \cdot dt$$

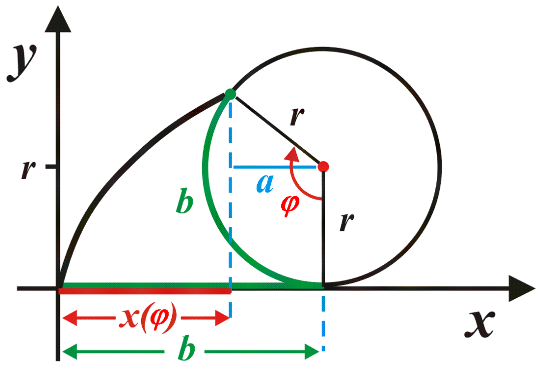
wird $$L = \int_A^B dl = \int_A^B \sqrt{1 + y'^2}\, dx$$

Linienintegral - Beispiel 1: Zykloide

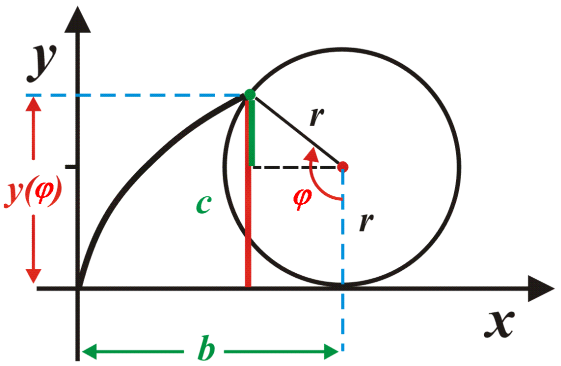
Rollt ein Kreis mit Radius r auf einer Geraden ab, so beschreibt sein Randpunkt eine Zykloide. Berechnen Sie ausgehend von einer zu findenden Parameterdarstellung die Länge dieser Kurve für einen Kreisumlauf.



Lösung:
Zuerst muss die Parameterdarstellung der Zykloide gefunden werden:



$$\begin{aligned} x(\varphi) &= b - a \\ &= r\varphi - r \cdot \cos(\varphi - \frac{\pi}{2}) \\ &= r\varphi - r \cdot \sin(\varphi) \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} y(\varphi) &= r + c \\ &= r + r \cdot \sin(\varphi - \frac{\pi}{2}) \\ &= r - r \cdot \cos\varphi \end{aligned}$$

Aus der Parameterdarstellung ergeben sich

$x'(\varphi) = r(1 - \cos\varphi)$ sowie $y'(\varphi) = r \cdot \sin\varphi$

und damit

$$\sqrt{x'(\varphi)^2 + y'(\varphi)^2} = r \cdot \sqrt{2 - 2\cos\varphi}\,.$$

Unter Verwendung der Formel für die Bogenlänge einer Kurve in Parameterdarstellung:

$$\int dl = \int \sqrt{x'(\varphi)^2 + y'(\varphi)^2}\, d\varphi$$

ergibt sich für die Länge der Zykloide für $0 \le \varphi \le 2\pi$

$$l = r \cdot \int_0^{2\pi} \sqrt{2 - 2 \cdot \cos\varphi}\; d\varphi = r \cdot \int_0^{2\pi} \sqrt{4\sin^2\frac{\varphi}{2}}\; d\varphi = 2r\int_0^{2\pi} \sin\frac{\varphi}{2}\, d\varphi = 8r$$

Woher kommt

$\sqrt{2 - 2 \cdot \cos\varphi} = \sqrt{4\sin^2\frac{\varphi}{2}}$ bzw. $1 - \cos\varphi = 2\sin^2\frac{\varphi}{2}$?

Additionstheoreme (sollten bekannt sein)

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$$
$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$

Subtrahiert man beide voneinander:

$$\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta) = 2\sin\alpha\sin\beta$$

mit $\alpha = \beta$

folgt: $\cos 0 - \cos 2\alpha = 2\sin^2\alpha$

$$1 - \cos 2\alpha = 2\sin^2\alpha$$

$$1 - \cos\varphi = 2\sin^2\frac{\varphi}{2}$$

Linienintegral - Beispiel: Parabel

Gesucht ist die Bogenlänge einer Parabel.

Lösung:

- Hat man eine Kurve in der Parameterdarstellung ($x(t), y(t)$), so lautet die Formel für die Bogenlänge:

  $$l = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\, dt$$

  Liegt der Startpunkt bei $t = 0$ (das ist z.B. Startzeit $t = 0$)

  ⇨ $$l = \int_0^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\, dt$$

- Im Falle des Parabelbogens sei $x = t$ und $y = t^2 / 2$.

  ⇨ damit ergibt sich für die Bogenlänge $l = \int_0^b \sqrt{1 + t^2}\, dt$

- Dieses Integral gilt es zu **lösen**.
  Wir ersparen und die Bemerkung „Wie leicht zu sehen …" und rechnen wirklich.

  ⇨ Für das Integral $\int \sqrt{1+t^2}\, dt$ liegt eine Lösung mittels geeigneter Substitution nahe.

  ⇨ Empfohlen (z.B. Bronstein) werden 2 verschiedene mögliche Substitutionen:
  $t = \sinh p$ oder $t = \tan p$

- Ich will hier den Weg mit der Substitution $t = \sinh p$ versuchen.
  mit $t = \sinh p$ ⇨ $dt = \cosh p \cdot dp$

- Für das Integral ergibt sich:

  $$\int \sqrt{1+t^2}\, dt = \int \sqrt{1 + \sinh^2 p} \cdot \cosh p \cdot dp =$$
  $$= \int \sqrt{\cosh^2 p - \sinh^2 p + \sinh^2 p} \cdot \cosh p \cdot dp =$$
  $$= \int \sqrt{\cosh^2 p} \cdot \cosh p \cdot dp = \int \cosh^2 p \cdot dp$$

  Berücksichtigen wir

  $$\cosh^2 p = \left(\frac{e^p + e^{-p}}{2} \right)^2 = \frac{1}{4}(e^{2p} + e^{-2p} + 2) = \frac{1}{2}\cosh 2p + \frac{1}{2}$$

  folgt:

  $$\int \cosh^2 p \cdot dp = \frac{1}{2}\int \cosh 2p \cdot dp + \frac{1}{2}\int dp = \frac{1}{4}\sinh 2p + \frac{1}{2} p + C$$

- Wir substituieren zurück: $p = ar\sinh t$

  ⇨ $\int \cosh^2 p \cdot dp = \frac{1}{4}\sinh 2(ar\sinh t) + \frac{1}{2} ar\sinh t + C$

  Nebenbetrachtung 1:

  was ist $\sinh 2(ar\sinh t)$?

  $\sinh 2p = 2\sinh p \cosh p$

  ⇨ $\sinh 2(ar\sinh t) = 2\sinh(ar\sinh t) \cdot \cosh(ar\sinh t)$

  wegen $\cosh p = \sqrt{1+\sinh^2 p}$

  ⇨ $\sinh 2(ar\sinh t) = 2\sinh(ar\sinh t) \cdot \sqrt{1+\sinh^2(ar\sinh t)} = 2 \cdot t \cdot \sqrt{1+t^2}$

  Nebenbetrachtung 2:

  $ar\sinh t = \ln(t + \sqrt{t^2+1})$

- damit ergibt sich:

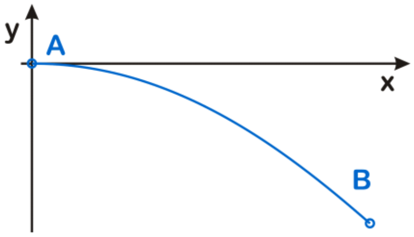
  $$\int \sqrt{1+t^2}\,dt = \frac{1}{2}\left(t \cdot \sqrt{1+t^2} + \ln(t+\sqrt{t^2+1})\right)$$

- für die Bogenlänge folgt:

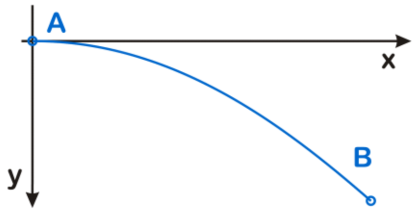
  $$\int_0^b \sqrt{1+t^2}\,dt = \frac{1}{2}\left(b \cdot \sqrt{1+b^2} + \ln(b+\sqrt{b^2+1})\right)$$

Linienintegral - Beispiel: Wurfparabel

Welche Bahnlänge wird von einem Körper in den ersten 2 Sekunden durchflogen, der waagerecht mit einer Geschwindigkeit von $20m/s$ geworfen wird?



⇨ ⇨ ⇨



Lösung:

- Hat man eine Kurve in der Parameterdarstellung $(x(t), y(t))$, so lautet die Formel für die Bogenlänge:

  $$l = \int_a^b \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2}\,dt$$

- Liegt der Startpunkt bei $t = 0;\ x(0) = 0;\ y(0) = 0$ ⇨ $l = \int_0^b \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2}\,dt$

- Im Falle der Wurfparabel sei hier $x = v_0 t$ und $y = -gt^2/2$.
  - Orientiert man der Einfachheit halber die y-Achse nach unten, ergibt sich $y = +gt^2/2$
  - Damit erhalten wir für die Bogenlänge $l = \int_0^{2s} \sqrt{v_0^2 + g^2t^2}\,dt$

- Dieses Integral gilt es zu lösen.
  Wir ersparen uns die Bemerkung „Wie leicht zu sehen …" und rechnen wirklich.
  ⇨ Für das Integral $l = \int \sqrt{v_0^2 + g^2t^2}\,dt$ liegt eine Lösung mittels geeigneter Substitution nahe.
  ⇨ Empfohlen (z.B. Bronstein) werden für Integrale vom Typ $\int R(t, \sqrt{\alpha^2 + t^2})dt$
  (R bezeichnet dabei eine rationale Funktion im Ausdruck, vor dem es steht)
  2 verschiedene mögliche Substitutionen:
  $t = \alpha \cdot \sinh p$ oder $t = \alpha \cdot \tan p$

- Ich will hier den Weg mit der Substitution $t = \alpha \cdot \sinh p$ versuchen.

- Es sei also $\alpha = v_0 / g$; $t = \alpha \cdot \sinh p = \dfrac{v_0 \cdot \sinh p}{g}$ ⇨ $dt = \alpha \cdot \cosh p \cdot dp$

- Für das Integral ergibt sich:

$$l = g \cdot \int \sqrt{\alpha^2 + t^2}\, dt =$$
$$= g \cdot \int \sqrt{\alpha^2 + \alpha^2 \sinh^2 p} \cdot \alpha \cdot \cosh p \cdot dp =$$
$$= g \cdot \alpha^2 \cdot \int \sqrt{\cosh^2 p - \sinh^2 p + \sinh^2 p} \cdot \cosh p \cdot dp =$$
$$= g \cdot \alpha^2 \cdot \int \sqrt{\cosh^2 p} \cdot \cosh p \cdot dp = g \cdot \alpha^2 \cdot \int \cosh^2 p \cdot dp$$

Berücksichtigen wir

$$\cosh^2 p = \left(\frac{e^p + e^{-p}}{2} \right)^2 = \frac{1}{4}(e^{2p} + e^{-2p} + 2) = \frac{1}{2}\cosh 2p + \frac{1}{2}$$

Folgt:

$$\int \cosh^2 p \cdot dp = \frac{1}{2}\int \cosh 2p \cdot dp + \frac{1}{2}\int dp + C = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}\sinh 2p + \frac{1}{2}p + C$$

- wir substituieren zurück: $p = ar\sinh\frac{t}{\alpha}$

⇨ $$\int \cosh^2 p \cdot dp = \frac{1}{4}\sinh 2(ar\sinh\frac{t}{\alpha}) + \frac{1}{2}ar\sinh\frac{t}{\alpha} + C$$

Nebenbetrachtung 1:

was ist $\sinh 2(ar\sinh\frac{t}{\alpha})$?

$$\sinh 2p = 2\sinh p \cdot \cosh p$$

⇨ $$\sinh 2(ar\sinh\frac{t}{\alpha}) = 2\sinh(ar\sinh\frac{t}{\alpha}) \cdot \cosh(ar\sinh\frac{t}{\alpha})$$

wegen $\cosh^2 p - \sinh^2 p = 1$ ⇨ $\cosh p = \sqrt{1 + \sinh^2 p}$

⇨ $$\sinh 2(ar\sinh\frac{t}{\alpha}) = 2\sinh(ar\sinh\frac{t}{\alpha}) \cdot \sqrt{1 + \sinh^2(ar\sinh\frac{t}{\alpha})} = 2 \cdot \frac{t}{\alpha} \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{t}{\alpha}\right)^2}$$

Nebenbetrachtung 2:

$$ar\sinh\frac{t}{\alpha} = \ln\left(\frac{t}{\alpha} + \sqrt{\left(\frac{t}{\alpha}\right)^2 + 1} \right)$$

- damit ergibt sich:

$$\int \cosh^2 p \cdot dp = \frac{1}{4} \cdot 2 \cdot \frac{t}{\alpha} \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{t}{\alpha}\right)^2} + \frac{1}{2} \cdot \ln\left(\frac{t}{\alpha} + \sqrt{\left(\frac{t}{\alpha}\right)^2 + 1} \right) + C$$

- mit $l = g \cdot \alpha^2 \cdot \int \cosh^2 p \cdot dp$ (siehe oben)

⇨ $$l = \frac{g \cdot \alpha \cdot t}{2} \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{t}{\alpha}\right)^2} + \frac{g \cdot \alpha^2}{2} \cdot \ln\left(\frac{t}{\alpha} + \sqrt{\left(\frac{t}{\alpha}\right)^2 + 1}\right) + C$$

$$l = \frac{v_0 \cdot t}{2} \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{gt}{v_0}\right)^2} + \frac{v_0^2}{2g} \cdot \ln\left(\frac{gt}{v_0} + \sqrt{\left(\frac{gt}{v_0}\right)^2 + 1}\right) + C$$

- Integriert man bestimmt:

$$l = \int_0^{2s} \sqrt{v_0^2 + g^2 t^2}\, dt =$$

$$= \frac{20m \cdot 2s}{2s} \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{9{,}81m \cdot 2s^2}{20m \cdot s^2}\right)^2} +$$

$$+ \frac{400m^2 \cdot s^2}{2 \cdot 9{,}81m \cdot s^2} \cdot \ln\left(\frac{9{,}81m \cdot s \cdot 2s}{20m \cdot s^2} + \sqrt{\left(\frac{9{,}81m \cdot 2s^2}{20m \cdot s^2}\right)^2 + 1}\right) =$$

$$= 28{,}0169m + 17{,}694m \cong 45{,}71m$$

Ergebnis:
Während der Körper während der ersten 2 Sekunden in der horizontalen Projektion (entlang der x-Achse) 40 m zurücklegt, beträgt die Länge der Bahn (blaue Linie) 45,71 m.

Linienintegral einer skalaren Funktion

Ist nicht nur die Länge einer Kurve interessant, sondern auch eine Größe wie z.B. die Masse einer Schraubenfeder mit variabler Dichte ρ, so ist für die Berechnung zusätzlich eine „Belegungsfunktion“ - hier die Dichte $\rho(P)$ in Abhängigkeit von der Position auf der Schraubenfeder, oder besser noch $\rho(t)$ in Abhängigkeit vom Parameter t - notwendig.

Bei konstanter Dichte ergibt sich: $m = \rho \cdot A \cdot l$.

Bei variabler Dichte wird eine Integration entlang des Kurvenzuges notwendig.
Die Kurve wird in Abschnitte $\Delta l_1 \ldots\ldots \Delta l_n$ zerlegt. Die Berechnung der Masse wird möglich, wenn jedem Abschnitt Δl_i eine konstante Dichte ρ_i zugeordnet werden kann. Günstigerweise lässt man dafür die Abschnitte unendlich klein werden ($\Delta l \to dl$) und integriert entlang des Kurvenzuges.

$$m = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \Delta m_i = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \rho_i \cdot A \cdot \Delta l_i$$

$$m = \int_A^B \rho \cdot A \cdot dl$$

Die Berechnung sei hier wieder am Beispiel einer **Funktion in Parameterdarstellung** gezeigt.

Es liegen vor: $x = x(t);\ y = y(t);\ z = z(t);\ \rho(t)$.

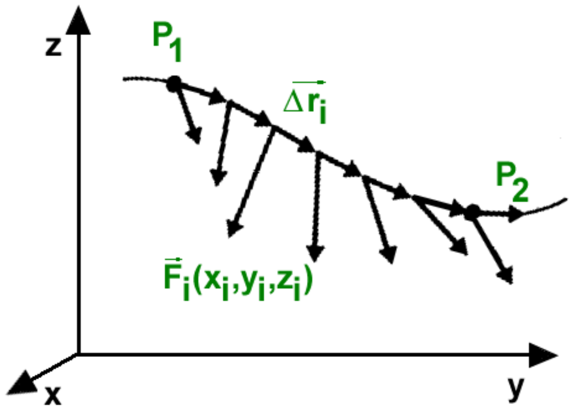
Damit ergibt sich für das Integral:

$$m = A \cdot \int_A^B \rho(t) \cdot dl = A \cdot \int_A^B \rho(t) \cdot \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2} \cdot dt$$

Linienintegral und Vektoren: Arbeit im Kraftfeld

Verschieben wir einen Körper unter der Wirkung des Kraftfeldes $\vec{F}(x,y,z)$ entlang dem Weg $\vec{r}(t)$ berechnet sich die dabei verrichtete Arbeit:

Kraftkomponente entlang des Weges mal zurückgelegter Weg.



Da sich Betrag und Richtung der Kraft sowie der jeweilige Winkel zum Weg von Punkt zu Punkt ändern können, gilt das zur Berechnung notwendige Skalarprodukt näherungsweise jeweils nur für ein Wegelement $\Delta\vec{r}_i$. Die Berechnung der Arbeit erfolgt daher in folgender Weise:

- Zerlegung des Weges in Teilabschnitte $\Delta\vec{r}_i = \vec{r}(t_{i+1}) - \vec{r}(t_i)$
- Ermittlung der jeweils wirkenden Kraft $\vec{F}(\vec{r}(t_i)) = \vec{F}(x(t_i), y(t_i), z(t_i))$
- Berechnen der Arbeit je Teilabschnitt - Skalarprodukt
  $\Delta W = \vec{F}(x(t_i), y(t_i), z(t_i)) \cdot \Delta\vec{r}_i$
- Aufsummieren der Teil-Arbeiten $W \approx \sum \vec{F}(x(t_i), y(t_i), z(t_i)) \cdot \Delta\vec{r}_i$
- Durch Verkleinerung des Wegelements erhält man letztendlich den exakten Wert der geleisteten Arbeit

$$W = \lim_{n\to\infty} \sum \vec{F}(x(t_i), y(t_i), z(t_i)) \cdot \Delta\vec{r}_i$$

$$W = \int_{P_1}^{P_2} \vec{F}(x,y,z)\, d\vec{r}$$ **„Linienintegral“**

Linienintegral - Beispiel Vektorfeld:

Gegeben seien das Vektorfeld $\vec{F}(x,y,z)$ und eine Raumkurve C mit der Parameterdarstellung $\vec{r}(t)$ durch

$$\vec{F}(x,y,z)=\begin{pmatrix} xy \\ yz \\ xz \end{pmatrix} \qquad \text{bzw.} \qquad \vec{r}(t)=\begin{pmatrix} t \\ t^2 \\ t^3 \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie das Linienintegral $I=\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r}$ in den Grenzen von Punkt $A=(-1,+1,-1)$ bis zum Punkt $B=(+1,+1,+1)$.

Lösung:

aus $I=\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r}$ in Parameterdarstellung ergibt sich:

$$I=\int_{t_1}^{t_2} F_x\big(x(t),y(t),z(t)\big)\cdot dx(t)\ +\int_{t_1}^{t_2} F_y\big(x(t),y(t),z(t)\big)\cdot dy(t)+\int_{t_1}^{t_2} F_z\big(x(t),y(t),z(t)\big)\cdot dz(t)$$

mit

$$d\vec{r}=\left(\frac{dx}{dt}\cdot dt,\frac{dy}{dt}\cdot dt,\frac{dz}{dt}\cdot dt\right) \text{, d.h. } dx=\left(\frac{dx}{dt}\right)dt\text{, } dy=\left(\frac{dy}{dt}\right)dt\text{, } dz=\left(\frac{dz}{dt}\right)dt$$

wegen

$$x(t)=t\text{, } y(t)=t^2\text{, } z(t)=t^3$$

ergibt sich

$$\vec{F}(x,y,z)=\begin{pmatrix} xy \\ yz \\ xz \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} t\cdot t^2 \\ t^2\cdot t^3 \\ t\cdot t^3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} t^3 \\ t^5 \\ t^4 \end{pmatrix}$$

damit folgt:

$$I=\int_{t_1}^{t_2} t^3 dt\ +\int_{t_1}^{t_2} t^5\cdot 2t\cdot dt+\int_{t_1}^{t_2} t^4\cdot 3t^2\cdot dt=\int_{t_1}^{t_2}\left(t^3+2t^6+3t^6\right)dt=\int_{t_1}^{t_2}\left(t^3+5t^6\right)dt$$

Die angegebenen Grenzen werden mit $t_1=-1$ und $t_2=1$ erreicht (einsetzten in $\vec{r}(t)$ ⇨ ahhh..).

⇨ $$\underline{I=\left.\frac{t^4}{4}\right|_{-1}^{+1}+5\cdot\left.\frac{t^7}{7}\right|_{-1}^{+1}=\frac{10}{7}}$$

Berechnung von speziellen Linienintegralen

Homogenes Vektorfeld, beliebiger Weg

- homogenes Vektorfeld $\vec{F} = a\vec{e}_x + b\vec{e}_y + c\vec{e}_z$
- Arbeit (Verschiebung $P_1 \to P_2$) $W = \int_{P_1}^{P_2} \vec{F} \cdot d\vec{s}$

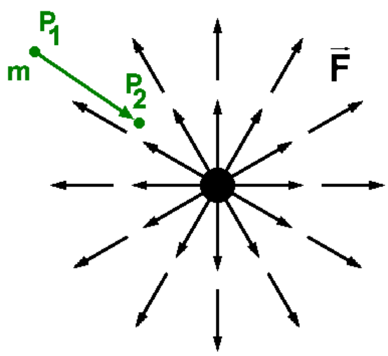
wegen: $d\vec{r} = dx \cdot \vec{e}_x + dy \cdot \vec{e}_y + dz \cdot \vec{e}_z$

⇨ $\vec{F} \cdot d\vec{r} = adx + bdy + cdz$

⇨ $$\boxed{W = a\int_{P_1}^{P_2} dx + b\int_{P_1}^{P_2} dy + c\int_{P_1}^{P_2} dz = a[x_2 - x_1] + b[y_2 - y_1] + c[z_2 - z_1]}$$

Bei homogenen Kraftfeldern hängt die Arbeit nur von der resultierenden Ortsverschiebung ab, nicht aber von der speziellen Form der Bahnkurve.

Radialsymmetrisches Vektorfeld, radialer Weg

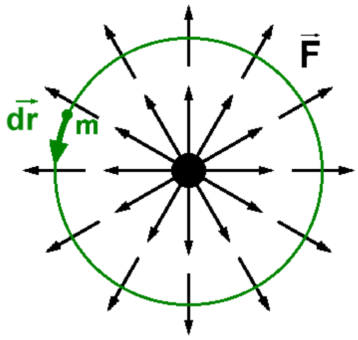


- Gravitationskraft $\vec{F} = \gamma \dfrac{m \cdot M \cdot \vec{r}}{r^3}$
- Arbeit beim Verschieben der Masse m von P_1 nach P_2 in radialer Richtung:

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{r} = F \cdot dr = \gamma \frac{M \cdot m}{r^2} \cdot dr$$

$$W = \int_{P_1}^{P_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{P_1}^{P_2} F \cdot dr = \gamma\, mM \int_{P_1}^{P_2} \frac{dr}{r^2} = -\gamma\, mM \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right)$$

Radialsymmetrisches Vektorfeld, kreisförmiger Weg



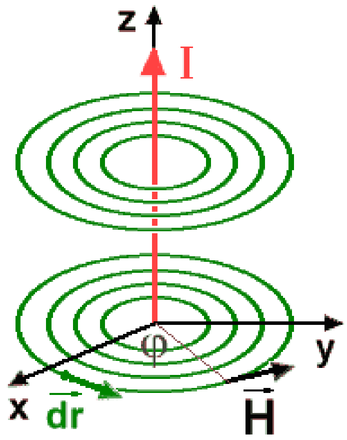
Bei Bewegung auf der Kreisbahn stehen Kraftvektor und Wegelement senkrecht aufeinander.

$$\vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$$

In einem radialsymmetrischen Feld wird auf einer Kreisbahn um das Kraftzentrum keine Arbeit geleistet.

$$\oint \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$$

Ringförmiges Feld, kreisförmiger Weg



ringförmiges Magnetfeld um einen stromdurchflossenen Leiter

$$\vec{H} = \frac{I}{2\pi\, r_0}(-\sin\varphi, \cos\varphi, 0)$$

Integrationsweg ist ein konzentrischer Kreis um den Leiter in der x-y-Ebene.

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{r} = \oint H \cdot dr = \frac{I}{2\pi\, r_0} \oint dr$$

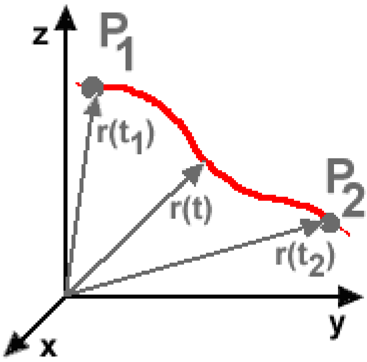
wegen $\oint dr = 2\pi\, r_0$

ergibt sich $\oint \vec{H} \cdot d\vec{r} = \frac{I}{2\pi\, r_0} \cdot 2\pi\, r_0 = I$

Das Linienintegral längs eines geschlossenen Weges im Magnetfeld ist gleich dem vom Weg eingeschlossenen Strom (Durchflutungssatz).

Berechnung des Linienintegrals im allgemeinen Fall

Kurve sei in Parameterdarstellung gegeben:



$$r_x = x(t);\ r_y = y(t);\ r_z = z(t)$$

$$\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$$

$$d\vec{r}(t) = (dx(t), dy(t), dz(t))$$

- $dx(t),\ dy(t),\ dz(t)$ sind die Differentiale der Funktionen $x(t),\ y(t),\ z(t)$

⇨ $dx(t) = \frac{dx}{dt} \cdot dt;\quad dy(t) = \frac{dy}{dt} \cdot dt;\quad dz(t) = \frac{dz}{dt} \cdot dt$

$$d\vec{r} = \left(\frac{dx}{dt} \cdot dt, \frac{dy}{dt} \cdot dt, \frac{dz}{dt} \cdot dt \right)$$

- während der Zeit $t_1 \to t_2$ wird auf der Ortskurve der Weg $P_1 \to P_2$ durchlaufen.

- Der Kraftvektor an jedem Punkt des Raumes lässt sich darstellen:

$$\begin{aligned} F(x,y,z) = {} & F_x(x(t), y(t), z(t))\vec{e}_x \\ & + F_y(x(t), y(t), z(t))\vec{e}_y \\ & + F_z(x(t), y(t), z(t))\vec{e}_z \end{aligned}$$

- Eingesetzt in das Integral zur Arbeitsberechnung ergibt sich:

$$W = \int_{P_1}^{P_2} F_x(x(t), y(t), z(t)) \cdot dx(t) + \int_{P_1}^{P_2} F_y(x(t), y(t), z(t)) \cdot dy(t) + \int_{P_1}^{P_2} F_z(x(t), y(t), z(t)) \cdot dz(t)$$

- setzt man für die Grenzen t_1 und t_2 ein

$$W = \int_{t_1}^{t_2} F_x \left(\frac{dx}{dt} \right) dt + \int_{t_1}^{t_2} F_y \left(\frac{dy}{dt} \right) dt + \int_{t_1}^{t_2} F_z \left(\frac{dz}{dt} \right) dt$$

Gegeben ist ein Vektorfeld $\vec{F}(x,y,z)$ und ein Weg in Parameterdarstellung $\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$.

Das Linienintegral ist dann

$$W = \int_{P_1}^{P_2} \vec{F}(x,y,z) \cdot d\vec{r} = \int_{t_1}^{t_2} F_x \left(\frac{dx}{dt} \right) dt + \int_{t_1}^{t_2} F_y \left(\frac{dy}{dt} \right) dt + \int_{t_1}^{t_2} F_z \left(\frac{dz}{dt} \right) dt$$