Imaginäre Zahlen / Komplexe Zahlen

Die Entwicklung der Zahlenmengen wurde weitgehend von entsprechenden historischen Notwendigkeiten bestimmt. In Urzeiten, als es um das einfache Abzählen von Gegenständen ging, genügte die Menge der positiven ganzen (natürlichen) Zahlen, um allen anstehenden Aufgaben zu genügen.
Eine grafische Darstellung dieser Zahlen ist auf einem *Zahlenstrahl* möglich.
Mit finanziellen Schulden kamen notwendigerweise die negativen ganzen Zahlen hinzu. Die Darstellung auf einem einfachen Strahl war nicht mehr möglich. Vielmehr musste jetzt eine *Zahlengerade* bemüht werden, auf der jeder Zahl ein isolierter Punkt zugeordnet ist.
Als man lernte mit Bruchteilen eines Ganzen umzugehen, tauchte die Menge der gebrochenen (rationalen) Zahlen auf. Grafisch werden diese rationalen Zahlen logischerweise zwischen den ganzen Zahlen in der Zahlengeraden angeordnet.
Damit war einer ganzen Reihe ökonomischer Notwendigkeiten Rechnung getragen. Man konnte sich zurücklehnen und das Werk betrachten. Und siehe da - die Anordnung der Zahlen auf der Geraden weist Lücken auf! Einige dieser Lücken wurden später im Rahmen der Mathematik sehr wichtig. Man belegt sie zum Teil sogar mit Namen wie π (Pi), *e*, $\sqrt{2}$. Und von diesen Lücken gibt es mehr - genau gezählt sind es unendlich viele. Deshalb erscheint es sinnvoll, diese Zahlengruppe mit einem Namen zu belegen - man nennt sie „irrationale Zahlen“, weil sie nicht durch einen Bruch, ein Verhältnis („Ratio“) darzustellen sind.

Damit erhalten wir aufeinander aufbauend folgende Zahlenbereiche:

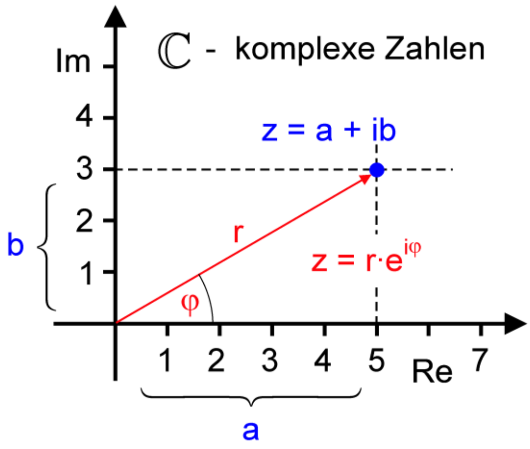
$\mathbb{N}$	Natürliche Zahlen	- ganze positive Zahlen
$\mathbb{Z}$	Ganze Zahlen	- alle ganzen Zahlen
$\mathbb{Q}$	Rationale Zahlen	- gebrochene Zahlen und ganze Zahlen gemeinsam
$\mathbb{R}$	Reelle Zahlen	- irrationale und rationale Zahlen gemeinsam

Mit der nun vollständig gefüllten Zahlengeraden lässt sich eine große Zahl mathematischer Operationen ausführen. So ist die Ausführung der Grundrechenarten uneingeschränkt möglich, wir können quadrieren, potenzieren, logarithmieren, differenzieren und integrieren. Eigentlich könnten wir wunschlos glücklich sein.

Aber bereits 1545 erkannte der italienische Mathematiker Gerolamo Cardano beim Lösen von Gleichungen 2. Grades, dass es beim Radizieren Probleme in unserem Zahlensystem gibt. In einigen Fällen traten Lösungen auf, die es in Cardanos Augen nicht geben konnte. Sie konnten also nur imaginär (eingebildet) sein.
Andere Quellen sehen den Ursprung der Theorie der komplexen Zahlen mit dem 1572 erschienenen Werk „L' Algebra“ des Italieners Raffaele Bombelli.

Wer auch immer - letztendlich ging es darum, den Zahlenbereich derart zu erweitern, dass auch Wurzeln negativer Zahlen berechnet werden können. Dies gelang durch Einführung einer Zahl i als Lösung der Gleichung $x^2 = -1$. Die Zahl i wurde von Euler vorgeschlagen und wird als **imaginäre Einheit** bezeichnet.

Wo aber bringt man diese Zahlen in der grafischen Darstellung unter?
Unsere Zahlengerade war ja bereits voll! Die nahe liegende Möglichkeit ist ein Ausweichen von der eindimensionalen Geraden zur zweidimensionalen Fläche. Dort gibt es neben der Abszisse, die man für die reellen Zahlen verwenden kann, auch noch die Ordinate, auf der sich die imaginären Zahlen unterbringen lassen.



Um den Raum zwischen den Achsen, der ja nun bestens „adressierbar“ ist, nicht zu verschwenden, kann man auch dort Zahlen ansiedeln, die dann eine reelle und eine imaginäre Komponente aufweisen - die komplexen Zahlen.

Für die Menge der komplexen Zahlen wird gewöhnlich das Symbol $\mathbb{C}$ benutzt.

Komplexe Zahlen werden üblicherweise in der Form $a+bi$ dargestellt, wobei a und b reelle Zahlen sind und i die imaginäre Einheit. Mit derart dargestellten komplexen Zahlen lässt es sich ähnlich wie mit Vektoren rechnen. Die Komponenten liegen entlang der reellen bzw. der imaginären Achse. Man nennt a den Realteil und b den Imaginärteil von $a+bi$.

Interessant ist es zu vermerken, dass es in der Menge der komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ keine Ordnungsrelation kleiner als „<“ oder größer als „>“ gibt (im Gegensatz z.B. zu den reellen Zahlen). Von zwei unterschiedlichen komplexen Zahlen lässt sich nicht sagen, welche die größere bzw. die kleinere Zahl ist, weil der Menge $\mathbb{C}$ ein lineares, eindimensionales Ordnungsprinzip fehlt.

Notation komplexer Zahlen
Wie bereits aus der Grafiken zu ersehen existieren 2 verschiedene Darstellungsvarianten komplexer Zahlen:

- Die <u>kartesische oder algebraische Form</u> $z=a+bi$.
  Sie erklärt sich eigentlich selbst aus ihrer Darstellung in der komplexen (Gauß'schen) Zahlenebene bzw. entspricht dem oben dargelegten Zusammenhang.

- <u>Polarform (trigonometrische Form) und Exponentialform</u> $z=r\cdot e^{i\varphi}=r\cdot(\cos\varphi+i\sin\varphi)$
  Eine Umrechnung in die kartesische Form ergibt
  $a=r\cdot\cos\varphi$ und $b=r\cdot\sin\varphi$.

  Eine Umrechnung der kartesischen in die Polarform ergibt:

$$r=|z|=\sqrt{a^2+b^2} \quad \text{sowie} \quad \varphi=\begin{cases}\arccos\frac{a}{r} & \text{für } b\geq 0\\ \arccos\left(-\frac{a}{r}\right)-\pi & \text{für } b<0\end{cases} \quad \text{bei } z\neq 0$$

Die Gleichheit von Polarform und Exponentialform wird häufig als Eulerschen Identität, Eulersche Formel oder Formel von Euler-Moivre bezeichnet (siehe dazu auch: trigonometrische Funktionen).

Sollte das noch verständlich sein, trägt zur Verwirrung des geneigten Lesers die höhere didaktische Weisheit verschiedener Autoren bei, die eine „Vereinfachung“ der Bezeichnungen vornehmen. So findet man gelegentlich
- $z = r \cdot cis\varphi$ - *cis* für *cos..+ i·sin..* oder
- $z = r \cdot E(\varphi)$ - *E* für $e^{i\ldots}$

In der komplexen Zahlenebene entspricht r dem Abstand des komplexen Punktes zum Ursprung, d.h. der „Vektorlänge“ r wird als „Betrag“ bezeichnet. φ entspricht dem Winkel des „Vektors“ zur reellen Achse und wird Argument, Winkel oder Phase genannt. Da z für die Argumente φ und $\varphi + 2\pi$ identisch ist erkennen wir, dass Polarform und Exponentialform nicht eindeutig sind. Man schränkt den Winkel daher auf ein Intervall $[-\pi, \pi]$ ein. Alle Werte $e^{i\varphi}$ stellen den Einheitskreis der komplexen Zahlen vom Betrag 1 um den Koordinatenursprung dar.

Die **Eulersche Identität** bezeichnet die Formel $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$
und bildet das Bindeglied zwischen trigonometrischen Funktionen und den komplexen Zahlen. Dabei bezeichnet e die Eulersche Zahl (Basis des natürlichen Logarithmus) und i die imaginäre Einheit der komplexen Zahlen.

Die Gleichung erscheint in Leonhard Eulers Introductio, veröffentlicht in Lausanne 1748 unter der Voraussetzung $\varphi \in R$ (aus der Anschauung wird klar, dass φ auch Winkel genannt wird), sie gilt jedoch auch für alle komplexen Argumente $\varphi \in C$.
Für den Winkel $\varphi = \pi$ (die Kreiszahl) ergibt sich die Identität $e^{i\pi} = -1$, die einen verblüffend einfachen Zusammenhang zwischen der Eulerschen Zahl e, der imaginären Einheit i der komplexen Zahlen und der Kreiszahl π herstellt.
Richard Feynman nannte diese Gleichung in seinem Notizbuch die „bemerkenswerteste Formel der Welt“, andere nennen sie die schönste Formel der Mathematik.
Spötter sagen, diese Formel besage nichts anderes als: „Wenn man sich umdreht, schaut man in die andere Richtung.“

Herleitung

1. Methode

Wir betrachten die Funktion $f(x) = \dfrac{\cos x + i \cdot \sin x}{e^{ix}}$

- Der Nenner ist nie Null, denn es gilt $(\cos x + i \cdot \sin x) \cdot e^{-ix} = e^{ix} \cdot e^{-ix} = e^0 = 1$
- Die Eulersche Identität besagt also, dass $f(x) = 1$ für alle x gilt.
  Wir zeigen das in den folgenden Schritten:

  ⇨ Wir zeigen $f'(x) = 0$ für alle x
  ⇨ Da die Ableitung überall Null ist, ist f konstant.

⇨ Da $f(0)=\dfrac{\cos 0+i\cdot\sin 0}{e^{i\cdot 0}}=1$ gilt, muss f konstant gleich 1 sein.

Der einzige Schritt, für den wir etwas tun müssen, ist der erste.
Berechnen wir also die Ableitung von f nach der Quotientenregel:
Die Ableitung des Zählers ist $-\sin x+i\cdot\cos x$, die des Nenners $i\cdot e^{ix}$.

Damit ergibt sich

$$f'(x)=\frac{(-\sin x+i\cdot\cos x)\cdot e^{ix}-(\cos x+i\cdot\sin x)\cdot i\cdot e^{ix}}{(e^{ix})^2}=$$

$$=\frac{-\sin x\cdot e^{ix}+i\cdot\cos x\cdot e^{ix}-i\cdot\cos x\cdot e^{ix}-i^2\cdot\sin x\cdot e^{ix}}{(e^{ix})^2}=0$$

2. Methode
Wir greifen auf die Taylor-Entwicklung zurück. Dort erhalten wir für

$$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} \quad\Rightarrow\quad e^{i\varphi}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(i\varphi)^n}{n!}$$

$$\sin x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad\Rightarrow\quad \sin\varphi=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\varphi^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\cos x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} \quad\Rightarrow\quad \cos\varphi=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\varphi^{2n}}{(2n)!}$$

Indem wir $(i\varphi)^n$ getrennt für gerade und ungerade Exponenten darstellen, gilt mit $i^2=-1$ für jedes $\varphi\in C$ und jede natürliche Zahl N die Gleichung,

$$\sum_{n=0}^{2N+1}\frac{(i\varphi)^n}{n!}=\sum_{m=0}^{N}(-1)^m\frac{\varphi^{2m}}{(2m)!}+i\cdot\sum_{m=0}^{N}(-1)^m\frac{\varphi^{2m+1}}{(2m+1)!},$$

vollziehen wir den Grenzübergang $N\to\infty$ ergibt sich

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(i\varphi)^n}{n!}=\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m\frac{\varphi^{2m}}{(2m)!}+i\cdot\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m\frac{\varphi^{2m+1}}{(2m+1)!}$$ oder anders geschrieben

$$e^{i\varphi}=\cos\varphi+i\sin\varphi$$

Addition / Subtraktion

- **in der algebraischen Form**
  Die Addition erfolgt komponentenweise für den reellen und den imaginären Teil:
  $$(a+bi)\pm(c+di)=(a\pm c)+(b\pm d)i$$

Multiplikation

- **in der algebraischen Form**
  Die Multiplikation erfolgt, wie wir es von Klammerausdrücken kennen:
  $$(a+bi)\cdot(c+di)=ac+adi+cbi+bdi^2=(ac-bd)+(ad+bc)i$$
  Die imaginäre Einheit i geht dabei mit $i^2=-1$ in die Rechnung ein.

- **in der Exponentialform / trigonometrischen Form**
  Entsprechend der üblichen Potenzgesetze gilt:
  $$\left(r_1\cdot e^{i\varphi_1}\right)\cdot\left(r_2\cdot e^{i\varphi_2}\right)=\left(r_1\cdot r_2\right)\cdot e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}$$
  Die Beträge werden multipliziert, die Phasen addiert.
  Entsprechend ergibt sich für die trigonometrische Form:
  $$\left[r_1\cdot(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)\right]\cdot\left[r_2\cdot(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)\right]=\left[r_1\cdot r_2\right]\cdot\left[\cos(\varphi_1+\varphi_2)+i\sin(\varphi_1+\varphi_2)\right]$$

Division

- **in der algebraischen Form**
  Der Quotient zweier komplexer Zahlen $a+bi$ und $c+di$ mit $c+di\neq 0$ ist etwas komplizierter zu berechnen. Wir müssten eine Vorschrift erfinden, wie man durch $c+di$ dividiert.

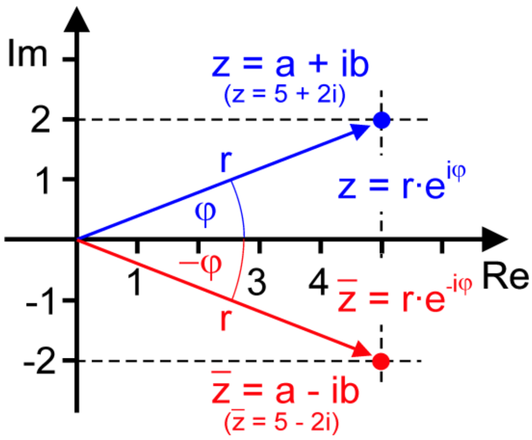
  Viel einfacher wäre doch eine Division durch eine reelle Zahl - das können wir schon. Aber wie schafft man das? Wir entsinnen uns der Polynom-Multiplikation $(x+y)(x-y)=x^2-y^2$. Nutzt man das im Falle komplexer Zahlen - z.B. für $c+di$ ergibt sich
  $$(c+di)(c-di)=c^2-i^2d^2=c^2+d^2.$$

  Erweitert man für eine Division also den gesuchten Bruch mit dem entsprechenden Ausdruck, reduziert sich das Problem auf eine Division durch eine reelle Zahl - reeller und imaginärer Teil der komplexen Zahl werden getrennt dividiert und wieder zu einer komplexen Zahl vereint:

  $$\frac{a+bi}{c+di}=\frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)}=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}\cdot i$$

- **Komplexe Konjugation**
  Wie zu sehen wurde die Zahl $c+di$ recht sinnvoll durch eine Rechnung mit der Zahl $c-di$ ergänzt. Man nennt die Zahl $c-di$ **konjugiert komplex** zur Zahl $c+di$.
  In der grafischen Darstellung lässt sich eine konjugiert komplexe Zahl als Spiegelung der komplexen Ausgangszahl an der reellen Achse verstehen. Die konjugiert komplexe Zahl zu z wird üblicherweise mit $\bar{z}$ bezeichnet.

  In der Polarform hat die komplex konjugierte Zahl $\bar{z}$ bei gleichem Betrag r gerade den negativen Winkel von z.



- **Division in der Exponentialform / trigonometrischen Form**
  Entsprechend der Potenzgesetze gilt für die Division zweier komplexer Zahlen $r_1 \cdot e^{i\varphi_1}$ und $r_2 \cdot e^{i\varphi_2}$ in der Exponentialform:

$$\frac{r_1 \cdot e^{i\varphi_1}}{r_2 \cdot e^{i\varphi_2}} = \frac{r_1}{r_2} \cdot e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}.$$

  Der Betrag des Divisors wird durch den Betrag des Dividenden geteilt; die Phase des Divisors wird von der Phase des Dividenden subtrahiert

  Analog muss das natürlich auch übertragen auf die trigonometrische Form gelten. Schreibt man also Divisor und Dividend als $r_1 \cdot (\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ und $r_2 \cdot (\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$ lässt sich das Ergebnis der Division aus der Exponentialform übertragen:

$$\frac{r_1 \cdot (\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)}{r_2 \cdot (\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)} = \frac{r_1}{r_2} \cdot \left[\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)\right]$$

Reziprokwert einer komplexen Zahl
Will man den reziproken Wert einer komplexen Zahl ermitteln, nutzt man die oben dargestellten Gesetzmäßigkeiten der Division:

$$z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{1}{a+bi} = \frac{a-bi}{(a+bi)(a-bi)} = \frac{a-bi}{a^2+b^2} = \frac{a}{a^2+b^2} - \frac{b}{a^2+b^2}i$$

Potenzieren
Ein Potenzieren ist in der algebraischen Form möglich. Dabei wird wie beim Potenzieren eines Klammerausdrucks unter Beachtung von $i^2 = -1$ vorgegangen. Günstiger ist allerdings eine Rechnung in der Exponentialform oder der trigonometrischen Form. Hier wird der Betrag potenziert und das Argument (Winkel) mit dem Exponenten multipliziert:

$$z^n = r^n \cdot e^{in\varphi} = r^n \cdot (\cos n\varphi + i \sin n\varphi)$$

Radizieren
Beim Rechnen mit Wurzeln sollte man mit Umsicht zu Werke gehen. Die Rechenregeln für reelle Zahlen gelten hier nur mit Einschränkung. So ist unter Verwendung der bisher korrekten Rechenregeln das Paradoxon:

$$1 = \sqrt{1} = \sqrt{(-1)\cdot(-1)} = \sqrt{-1}\cdot\sqrt{-1} = i \cdot i = -1$$

denkbar. Das ist offensichtlich falsch - aber wo liegt der Fehler. Im konkreten Fall ist der Schritt

$$\sqrt{(-1)\cdot(-1)} = \sqrt{-1}\cdot\sqrt{-1}$$

nicht erlaubt. Vielmehr gilt $\sqrt{(-1)\cdot(-1)} \neq \sqrt{-1}\cdot\sqrt{-1}$!
Weiterhin sollte der Tatsache Beachtung geschenkt werden, dass neben der Lösung $\sqrt{-1} = i$ auch die Lösung $\sqrt{-1} = -i$ existiert.

Allgemein gilt: Radizieren komplexer Zahlen erfolgt, indem aus dem Betrag die n -te Wurzel gezogen wird und das Argument (Winkel) durch n dividiert wird. Es entsteht eine erste Lösung. Bei einer n -ten Wurzel entstehen n Lösungen, die jeweils um den Winkel $2\pi / n$ zum Ursprung der Gauß'schen Ebene gedreht sind.

Berechnung von i^i (i hoch i)
Die Potenz i^i der imaginären Einheit kann man mit der Eulerschen Identität so berechnen:

- Man setzt $\pi / 2$ in die Identität ein und erhält $e^{i\frac{\pi}{2}} = i$
  - ⇨ das heißt aber, dass $i\pi / 2$ eine Lösung der Gleichung $e^z = i$
  - ⇨ logarithmieren wir $e^{i\frac{\pi}{2}} = i$, ergibt sich $\ln(i) = i\dfrac{\pi}{2}$
  - ⇨ die Definition der Potenz zweier komplexer Zahlen z und ω lautet: $z^\omega = e^{\omega \cdot \ln(\omega)}$

  Möchte man nun die Potenz i^i berechnen, so erhält man also: $i^i = e^{i \cdot \ln(i)}$
  - ⇨ $\ln(i) = i\dfrac{\pi}{2}$ kennen wir bereits; es folgt $i \cdot \ln(i) = (-1)\dfrac{\pi}{2}$
  - ⇨ $i^i = e^{i(i\frac{\pi}{2})} = e^{-\frac{\pi}{2}} \approx 0{,}20787957635076$
    erstaunlicherweise ergibt sich ein reeller Zahlenwert!

Beachte:

Wegen der $2\pi i$-Periodizität der komplexen Exponentialfunktion, sind auch alle Werte der Form $i\frac{\pi}{2}+2k\pi\cdot i$ mit $k\notin Z$ Lösungen von $e^z=i$

⇨ damit gilt also auch $\ln(i)=i\frac{\pi}{2}+2k\pi\cdot i$

⇨ $i^i=e^{i\ln(i)}=e^{i(i\frac{\pi}{2}+2k\pi\cdot i)}=e^{-\frac{\pi}{2}+2k'\pi}$ mit $k'\in Z$

⇨ in Wirklichkeit existieren als Lösung unendlich viele reelle Werte

komplexen Zahlen und ihre Anwendung

Es hat sich gezeigt, dass komplexe Zahlen tiefer in der Natur und auch in der Mathematik verankert sind, als man zur Zeit ihrer Entdeckung ahnen konnte. Das Rechnen mit diesen „eingebildeten" Zahlen liefert sehr häufig Ergebnisse, die anders nicht zu erreichen sind. Der Begriff „imaginär" oder „eingebildet" für den Zahlenbereich hat sich damit eigentlich als falsch erwiesen, wird aber historisch bedingt beibehalten.

In der **Physik** werden komplexe Zahlen vielfältig verwendet wie z.B.:

- in der Quantentheorie die sehr effektiv das Werkzeug der komplexen Zahlen nutzt,
- in der Relativitätstheorie spielt die vierdimensionalen Raum-Zeit eine herausragende Rolle - in ihr nutzt man als vierte Koordinate ict. Der Ausdruck $r=(x,y,z,ict)$ wird als Vierervektor bezeichnet.
- die Behandlung von Differentialgleichungen zu Schwingungsvorgängen lässt sich wesentlich vereinfachen,
- komplizierten Beziehungen mit Produkten von Sinus- bzw. Kosinusfunktionen lassen sich durch Einsatz der Exponentialfunktionen vereinfachen.

In der **Elektrotechnik** wird das kleine i schon für den Wechselstrom verwendet. Um Verwechslungen zu vermeiden benutzt man für die imaginäre Einheit ein kleines j. Komplexe Zahlen haben daher die Struktur $a+bj$.

Benutzt wird die komplexe Zahlenebene, um Phasenverschiebungen z.B. bei kapazitiven oder induktiven Lasten zu behandeln. So wird ein Ohmscher Widerstand entlang der reellen Achse, ein induktiver Widerstand entlang der positiven imaginären Achse und ein kapazitiver Widerstand entlang der negativen imaginären Achse abgetragen.