Ableitung einer impliziten Funktion

Gegeben sei eine Funktion in der Form: $f(x,y)=0$

Wir setzen voraus, dass es im Intervall $a<x<b$ genau eine Funktion $y=y(x)$ gibt, die der Gleichung oben genügt. Dann nennt man $y=y(x)$ eine durch $f(x,y)=0$ **implizit** definierte Funktion. $y=y(x)$ sei in $a<x<b$ differenzierbar.

Um die Ableitung $y'(x)$ zu ermitteln, denke man sich $x(x)$ in die erste Gleichung eingesetzt.
Wir differenzieren den erhaltenen Ausdruck $f(x,y(x))$ nach x.
Diese Ableitung hat wegen $f(x,y)=0$ für jedes x des Intervalls (a,b) den Wert 0.

Man erhält eine Gleichung zwischen x, y und $y'(x)$, aus der man gegebenenfalls die gesuchte Ableitung $y'(x)$ gewinnen kann.

Manchmal lässt sich diese nicht explizit ausdrücken, es sollte aber möglich sein, $y'(x_0)$ für ein bestimmtes $x=x_0$ zu berechnen, nachdem man den zu x_0 gehörigen Wert y_0 aus der Ausgangsgleichung gewonnen hat. Dieses Verfahren erweist sich dann als besonders wichtig, wenn die implizite Darstellung der Ausgangsfunktion nicht in die explizite Darstellung überführbar ist.

Eine ähnliche Herangehensweise mittels Differential ist folgende:
Wir bringen die Funktion wie auch oben in der Form $f(x,y)=0$ und bilden das totale Differential der linken and rechten Seite der Gleichung

$$df=\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy=0$$

Nun separieren wir das Differential der Variablen, die wir als abhängige Veränderliche betrachten wollen and finden etwa

$$dy=-\frac{\partial f/\partial x}{\partial f/\partial y}dx \qquad \text{wegen} \quad dy=\frac{dy}{dx}dx \quad \text{finden wir} \quad \frac{dy}{dx}=-\frac{\partial f/\partial x}{\partial f/\partial y}$$

Beispiel 1: $x^2+y^2=r^2$ (Hier ist zur Kontrolle eine explizite Rechnung möglich)

Es ergibt sich $f(x,y)=x^2+y^2-r^2$

differenzieren ergibt: $2x+2yy'=0$

es folgt: $y'=-\frac{x}{y}$

Beispiel 2: $f(x,y)=x+y-\cos(xy)-0{,}1=0$

⇨ $dx+dy+y\cdot\sin(xy)dx+x\cdot\sin(xy)dy=0$

⇨ $dy=-\frac{1+y\cdot\sin(xy)}{1+x\cdot\sin(xy)}dx$ $\boxed{\frac{dy}{dx}=-\frac{1+y\cdot\sin(xy)}{1+x\cdot\sin(xy)}}$

So wie hier ist das Ergebnis oft wieder eine implizite Funktion.