KUGELPACKUNGEN

VON KEPLER BIS HEUTE

Martin Henk

Geometria una et aeterna est in mente Dei refulgens.

(Johannes Kepler, 1610)

Obwohl Kugelpackungsprobleme zu den ältesten und bekanntesten Problemen in der Geometrie gehören, ist unser Wissen über optimale Kugelpackungen immer noch recht bescheiden. In jüngster Zeit haben jedoch einige computergestüzte mathematische Untersuchungen zu wichtigen und spektakulären Durchbrüchen geführt, eventuell sogar zur Lösung der 400 Jahre alten Keplervermutung.

In diesem Artikel möchten wir die spannende und zum Teil kontroverse Geschichte der Kugelpackungen aufzeigen, neuere Entwicklungen und moderne Zweige der klassischen Theorie beschreiben und auf Verbindungen zu anderen Wissenschaften eingehen.

KEPLER VERSUS COMPUTER

Im Jahre 1611 veröffentlichte der Astronom und Mathematiker Johannes Kepler ein Büchlein mit dem Titel „Vom sechseckigen Schnee“ /1/, dass er seinem Freund und Mentor, dem Prager Hofrat Wackher von Wackenfels, als Neujahrsgabe widmete. Er entwickelt darin kühne Ideen zum Aufbau der Materie und untersucht unter anderem verschiedene in der Natur auftretende Formen und Muster, wie z. B. Schneeflocken oder die Anordnung der Kerne von Granatäpfeln. Bei den Granatäpfeln stellte er nun fest, dass sehr viele Kerne auf sehr kleinem Raum gepackt sind. Dies führte ihn dann zur Betrachtung verschiedener Anordnungen sich nicht überlappender, kongruenter (gleich großer) Kugeln im dreidimensionalen Raum. Eine solche Anordnung nennt man *Kugelpackung*. Kepler war nun an einer Kugelpackung interessiert, so dass die *Dichte der Kugelpackung*, d. h. der Anteil des von den Kugeln überdeckten Raumes möglichst groß ist.

Eine von ihm untersuchte Kugelpackung ist heute als die flächenzentrierte kubische (*fcc-*) Packung bekannt. Sie ist die natürlichste Anordnung von Kugeln, die man sich vorstellen kann, und man findet sie bei jedem Obsthändler, der seine Orangen oder Äpfel stapelt. Auch viele Kristalle, wie z. B. Gold, Silber, Aluminium, kristallisieren gemäß dieser Anordnung.

Mathematisch lässt sie sich folgendermaßen beschreiben: Zunächst wird eine Grundschicht von Kugeln konstruiert, in der jede Kugel von sechs anderen Kugeln berührt wird. Dadurch entsteht eine so genannte *hexagonale Packung.* Anschließend wird eine Kopie dieser Schicht auf die Grundschicht gelegt, so dass die Kugeln in die Lücken der Grundschicht fallen. Die zweite Schicht entsteht also durch Verschiebung der Grundschicht um einen gewissen Vektor t. Es werden nun weitere Kopien der Grundschicht nach unten und oben gestapelt, so dass jede Schicht durch Translation um ein Vielfaches des Vektors t aus der Grundschicht entsteht. (Abbildung 1)

Berechnet man die Dichte dieser fcc-Packung, so ergibt sich ein Wert von $\pi/\sqrt{18} \approx 0{,}74048$ ... Kepler war nun davon überzeugt, dass es keine Packung mit einer größeren Dichte geben kann, und damit war die Kepler-Vermutung geboren.

Kepler-Vermutung (1611): Die Dichte einer optimalen Kugelpackung in Dimension 3 beträgt $\pi/\sqrt{18}$.

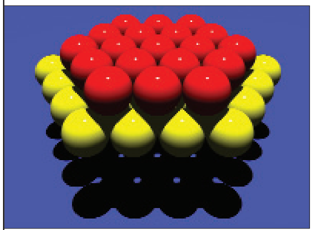
Seither hat dieses Problem viel Aufmerksamkeit auf sich gezogen. Es findet sich auch in der legendären Problemliste von David Hilbert, die er im Jahre 1900 auf dem Internationalen Mathematikerkongress in Paris präsentierte. Im Laufe der Zeit wurden zwar immer bessere obere Schranken für eine optimale Packung gefunden, allerdings kein umfassender Beweis der so offensichtlich richtigen Kepler-Vermutung.

While many mathematicians believe, and all physicists know, that the density cannot exceed $\pi/\sqrt{18}$, the best probably established bound known seems to have been … 0,828 … *(C. A. Rogers, 1958)*

This is a scandalous situation. All that is missing, is a proof. *(J. Milnor, 1967)*

It's one of those problems that tells us that we are not as smart as we think we are. *(D. J. Muder, 1988)*

Um so größer war die Überraschung als im Jahre 1993 eine Arbeit von Wu Yi. Hsiang /2/ veröffentlicht wurde, die eine Lösung der nun fast 400-jährigen Kepler-Vermutung versprach. Schon bald nach Erscheinen der ca. 100 Seiten umfassenden Arbeit brach jedoch eine hitzige Debatte über ihre Korrektheit aus. Führende Experten waren nicht in der Lage, einzelne Beweisschritte zu verifizieren (siehe /3, 4/), so dass letztendlich die Arbeit nicht als Lösung akzeptiert wurde. Im August 1998 kündigte Thomas C. Hales an, dass seine mehr als siebenjährigen Untersuchungen (teilweise in Zusammenarbeit mit seinem Studenten Sa-



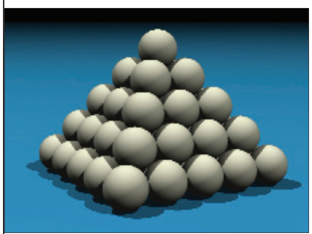


Abbildung 1
Hexagonaler Aufbau der fcc-Kugelpackung und ein Ausschnitt aus der fcc-Packung

muel P. Ferguson) zur Kepler-Vermutung erfolgreich zum Abschluss gekommen seien. Im Gegensatz zu der Arbeit von Hsiang beruht der Beweis von Hales sehr stark auf Computerberechnungen, und zwar in einem für mathematische Beweise nie gekanntem Umfang. Ein paar Daten: Es werden insgesamt ungefähr 100 000 nichtlineare Optimierungsprobleme mit Hilfe von linearen Relaxierungen gelöst. Jedes dieser Probleme hat 100 bis 200 Variablen und 1 000 bis 2 000 Restriktionen. Die verbleibenden nichtlinearen Optimierungsprobleme werden mit Branch- und Bound-Methoden aus der globalen Optimierung behandelt. Die ca. 3 GB umfassenden Inputdaten all dieser Probleme sowie die dazu gehörigen ca. 250 Seiten umfassenden theoretischen Ausführungen sind auf der Homepage von T. C. Hales verfügbar (siehe www.math.pitt.edu/~thales/kepler98). Seit fünf Jahren versucht ein Team von Experten die Frage zu entscheiden, ob diese Computerlösung von Hales ein mathematischer Beweis ist. Bisher ist die Arbeit von Hales nicht erschienen. Dafür aber ein Buch von W.-Y. Hsiang /5/, in dem er nun seinen Ansatz zur Lösung der Kepler-Vermutung detaillierter darlegt.

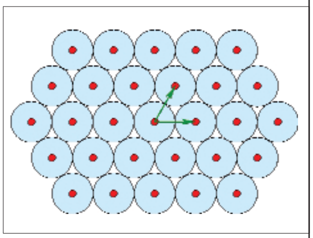


Abbildung 2
Die hexagonale Gitterpackung

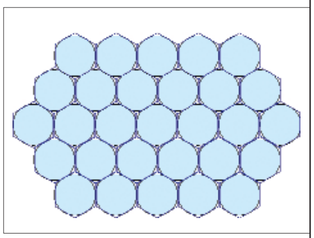


Abbildung 3
Dirichlet-Voronoi-Zellen (DV-Zellen) der hexagonalen Gitterpackung

GITTER MACHEN ES EINFACHER

Das entsprechende dreidimensionale Kugelpackungsproblem für so genannte Gitterpackungen ist bereits seit 1831 gelöst. Um dieses Problem und damit zusammenhängende Fragestellungen zu beschreiben, ist es notwendig, ein paar allgemeine Definitionen einzuführen. Unter einem *Gitter* Λ versteht man die Menge aller ganzzahligen Linearkombinationen von n linear unabhängigen Punkten im n-dimensionalen euklidischen Raum. Ist der Abstand zwischen je zwei *Gitterpunkten* (Elemente des Gitters) nicht kleiner als 2, so nennt man solch ein Gitter ein *Packungsgitter* für die n-dimensionale Einheitskugel B^n. Betrachtet man z. B. das Gitter Λ_{hex} in der Ebene, welches von den zwei Vektoren $(2,0)^T$ und $(1,\sqrt{3})^T$ erzeugt wird, so ist dies ein Packungsgitter, das so genannte *hexagonale Gitter* für den Kreis B^2. Setzt man auf jeden Gitterpunkt einen Kreis mit Radius 1, so sieht man, dass die Kreise sich nicht überlappen, und man spricht von der *Gitterpackung* $\Lambda_{hex} + B^2$. (Abbildung 2)

Die Dichte, also der Anteil des Raumes der von den Kugeln (Kreisen) der Gitterpackung überdeckt wird, lässt sich folgendermaßen berechnen. Zu jedem Gitterpunkt b des Gitters Λ betrachtet man die Menge der Punkte des Raumes, deren nächster Gitterpunkt des Gitters der Punkt b ist. Diese Menge nennt man Dirichlet-Voronoi-Zelle von b. Im Falle eines Gitters sind alle Dirichlet-Voronoi-Zellen (DV-Zellen) Translate voneinander, und für die hexagonale Gitterpackung erhält man reguläre Sechsecke. (Abbildung 3)

Jede DV-Zelle enthält die Kugel mit Mittelpunkt b, und somit ist die Dichte einfach das Verhältnis aus dem Volumen von B^n zu dem Volumen einer DV-Zelle. Im Beispiel von Λ_{hex} ist das Volumen von B^2

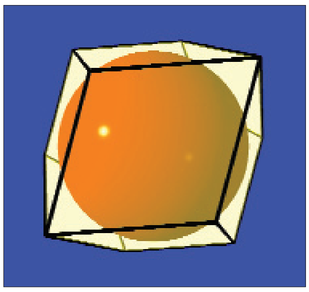
Abbildung 4
Sitzgruppe (um 1250) im Dom zu Magdeburg – ein throndendes Herrscherpaar, vermutlich Kaiser Otto I. und seine Gemahlin Editha darstellend. Die Kugelpackung mit einer optimalen hexagonalen Anordnung von 19 Kugeln in der Hand der männlichen Figur wird als Zeichen der Herrschaft und Symbol der Himmelssphäre mit den 12 Sternzeichen und sieben Planeten angesehen.

nichts anderes als der Flächeninhalt eines Kreises, also π. Der Flächeninhalt einer DV-Zelle ist gleich $\sqrt{12}$. Somit ergibt sich für die Dichte der hexagonalen Gitterkreispackung der Wert $\pi/\sqrt{12} \approx 0{,}9068\ldots$ Dies ist auch die bestmögliche Dichte einer Gitterpackung von Kreisen in der Ebene, wie bereits 1773 von Lagrange gezeigt wurde.

Eine optimale hexagonale Anordnung von 19 Kugeln findet sich auch im Magdeburger Dom. (Abbildung 4)

Lagrange war allerdings eigentlich nicht an Kreispackungen interessiert, sondern an einem zahlentheoretischen Problem, nämlich der Bestimmung des arithmetischen Minimums positiv definiter quadratischer (binärer) Formen. Dass dieses Problem äquivalent zu dem Kugelpackungsproblem für Gitterpackungen ist, sowie die Einführung des Begriffes Gitter, geht auf Gauß zurück. Die oben beschriebene fcc-Packung ist eine Gitterpackung der dreidimensionalen Kugel. Ihre Dirichlet-Voronoi-Zellen sind so genannte Rhombendodekaeder mit einem Volumen von $4\sqrt{2}$, was zu der Dichte von $\pi/\sqrt{18}$ führt. (Abbildung 5)

Abbildung 5
DV-Zelle (Rhombendodekaeder) der fcc-Packung



Gauß bewies nun, dass es keine bessere Gitterpackung als die fcc-Packung geben kann.

Gauß, 1831. Die fcc-Packung ist die beste Gitterpackung von dreidimensionalen Kugeln.

Aufgrund der Nähe zur Zahlentheorie und Kristallographie zählt das Kugelpackungsproblem für Gitterpackungen zu den meist untersuchtesten Fragestellungen in der Packungstheorie. Bis zur Dimension 8 kannte man bereits die optimalen Lösungen seit 1934, aber seitdem konnte man das Problem für keine weitere Dimension lösen.

Kürzlich scheint es jedoch Henry Cohn (Microsoft Research) und Abhinav Kumar (graduate student in Harvard) gelungen zu sein, einer weiteren Dimension die Gitterpackungsdichte zu entlocken, nämlich der Dimension 24. In dieser Dimension gibt es ein sehr interessantes Gitter, das so genannte *Leech-Gitter*, welches viele bemerkenswerte mathematische Eigenschaften besitzt, unter anderem eine hohe Packungsdichte. Es wird sogar vermutet, dass das Leech-Gitter unter allen Packungen (also auch Nicht-Gitterpackungen) optimal ist. Auf einem im November abgehaltenen Workshop am MSRI in Berkeley stellte Henry Cohn sein neues Ergebnis vor. Wieder spielt der Computer eine wichtige Rolle. Zunächst wird mit Hilfe von Computerberechnungen gezeigt, dass die Abweichung zwischen der Dichte einer optimalen Packung und der Dichte des Leech-Gitters kleiner als etwa 10^{-30} ist. Anschließend werden klassische Ergebnisse aus der Geometrie der Zahlen benutzt, um zu zeigen, dass das Leech-Gitter unter allen Gitterpackung in dieser kleinen Umgebung optimal ist.

Vielleicht das wichtigste offene Problem im Zusammenhang mit Gitterpackungen ist die Frage nach der Dichte einer dichtesten Kugelpackung in hohen Dimensionen. Diese Frage ist eng verbunden mit der Existenz von „guten Codes“, und die bisher besten oberen Schranken für die Dichte einer dichtesten Gitterpackung wurden auch mit Mitteln aus der Codierungstheorie erzielt. Die Lücke zwischen diesen Schranken und den besten unteren Schranken ist aber immer noch exponentiell groß.

Betrachtet man nun für beliebige, nicht notwendigerweise gitterförmige Packungen die DV-Zellen, so erhält man im Allgemeinen nicht kongruente Polytope. (Abbildung 6)

In diesem Fall lässt sich die Dichte also nicht so einfach mit Hilfe *nur einer* DV-Zelle ermitteln. In der Ebene jedoch konnte der norwegische Mathematiker Thue „im Prinzip“ zeigen, dass der Flächeninhalt einer DV-Zelle einer beliebigen Kreispackung nicht kleiner ist als $\sqrt{12}$, also dem Flächeninhalt einer DV-Zelle in der hexagonalen Gitterpackung. Somit ist die hexagonale Gitterpackung eine optimale Packung unter allen möglichen Packungen von Kreisen in der Ebene. Obwohl Thue dieses Resultat bereits 1892 ankündigte, veröffentlichte er erst 1910 einen Beweis, der allerdings eine Lücke enthält, die um 1940 unabhängig von L. Fejes Tóth und von Segre und Mahler geschlossen wurde.

Dieses zweidimensionale Resultat legt die Vermutung nahe, dass auch in Dimension 3 das Volumen einer DV-Zelle einer beliebigen Packung nicht kleiner ist, als das Volumen einer DV-Zelle des fcc-Gitters. Dies ist aber falsch! Das regelmäßige Dodekaeder etwa kommt als DV-Zelle einer Packung vor und hat ca. 2 % geringeres Volumen als das Rhombendodekaeder. (Abbildung 7)

Allerdings können nicht alle DV-Zellen einer Packung regelmäßige Dodekaeder sein, da man den ganzen Raum mit einem Dodekaeder nicht lückenlos ausfüllen kann. Und hier liegt eine der Schwierigkeiten der Kepler-Vermutung. Um mit Hilfe der Volumina von DV-Zellen die Kepler-Vermutung zu beweisen, ist es notwendig, das Mittel mehrerer DV-Zellen zu berechnen. Dies führt zu zahlreichen Fallunterscheidungen und zu einem enormen Rechenaufwand.

Alles ist endlich

Bei den bisher beschriebenen Packungen handelt es sich um so genannte unendliche Packungen. Alle in der realen Welt auftretenden Packungen (Kerne in Granatäpfeln, Atome in Kristallen usw.) sind jedoch endlich. Auch die größten Kristalle sind endlich und haben Ränder. Mathematisch unterscheidet man nun zwei Arten von *endlichen Packungen*. Zum einen gibt es die so genannten „*Bin-Packings*“. Hier fragt man, wieviele Kugeln passen in einen gegebenen Container, etwa einen Würfel der Kantenlänge 4 oder 5 oder 8 oder ... Zu dieser Problematik gibt es zahlreiche Arbeiten, jedoch kann man nicht auf allgemeingültige Aussagen hoffen, da mit jeder neuen Kantenlänge und jeder neuen Form eines Containers ein unabhängiges neues Problem entsteht. Anders sieht es bei den so genannten „*Free-Packings*“ aus. Hier möchte man eine gegebene Anzahl m von Kugeln B^n so anordnen, dass das Volumen ihrer konvexen Hülle minimal wird. Die konvexe Hülle ist dabei die kleinste konvexe Menge, die die Kugeln enthält. In der Ebene kann man sich die konvexe Hülle auch wie folgt vorstellen: Man zieht ein Gummiband so weit auseinander bis es die m Kreise enthält. Dann lässt man das Band los und der Bereich, der von dem Band begrenzt wird, ist die konvexe Hülle. (Abbildung 8)

Der Flächeninhalt der linken Packung beträgt $8+2\sqrt{3}+\pi$ und rechts ergibt sich der Wert $12+\pi$. Obwohl die in Abbildung 8 rechts dargestellte Anordnung schlechter ist, ist sie von besonderem Interesse und besitzt den einprägsamen Namen *Wurstpackung* oder einfach *Wurst*. Allgemein nennt man eine Anordnung von endlichen vielen Kugeln B^n Wurst, wenn die Mittelpunkte der Kugeln auf einer Linie liegen und sich je zwei benachbarte Kugeln berühren. Betrachtet man die konvexe Hülle einer solchen Wurst von sechs Kugeln in der Dimension 3, so erinnert sie an ei-

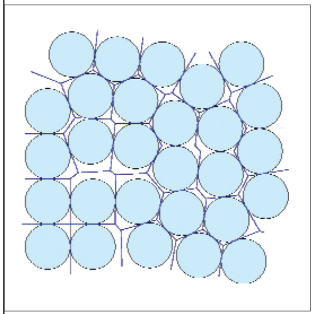


Abbildung 6
DV-Zellen einer beliebigen (irregulären) Packung

Abbildung 7
Das regelmäßige Dodekaeder als DV-Zelle

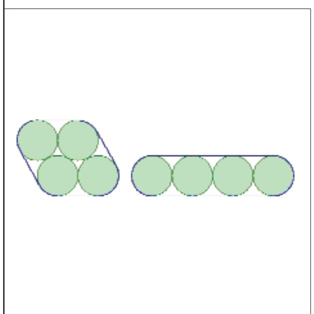


Abbildung 8
Konvexe Hüllen von zwei Kreispackungen

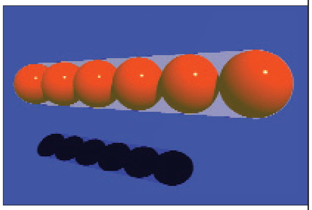


Abbildung 9
Wurst von sechs Kugeln

ne ungarische Salami; und in der Tat stammt der Name von dem ungarischen Mathematiker László Fejes Tóth. (Abbildung 9)

Dieser hat im Jahre 1973 vermutet, dass Würste immer die optimale Anordnung von endlichen vielen Kugeln darstellen (bzgl. dem Volumen ihrer konvexen Hülle), falls die Dimension nicht kleiner als 5 ist.

Wurstvermutung, 1973, L. Fejes Tóth. Für $n \geq 5$ sind Würste die einzigen optimalen Anordnungen von endlich vielen Kugeln.

Falls die Wurstvermutung richtig ist, dann bietet sie eine universelle Lösung des endlichen Packungsproblems, unabhängig von der Anzahl der Kugeln. Und dieser Aspekt macht sie auch so attraktiv. In den Dimensionen 2, 3 und 4 können Würste für alle m nicht optimal sein. Dies lässt sich einfach aus den bekannten Dichten für die dichtesten Gitterpackungen ableiten. Genauer gilt, dass in der Ebene Würste für mehr als zwei Kreise nie optimal sind, und hier kennt man auch für die „meisten" Zahlen m die optimalen Konfigurationen. In der Dimension 3 ist bekannt, dass für 56 Kugeln die Wurst nicht optimal ist, sondern eine clusterförmige Anordnung. Man vermutet aber, dass für bis zu 55 Kugeln die bestmögliche Anordnung eine Wurst ist. In Dimension 4 hat man errechnet, dass Würste für 375 370 Kugeln nicht optimal sind. Im Laufe der Zeit sind zahlreiche Aussagen im Umfeld der Wurstvermutung bewiesen worden. Es dauerte jedoch bis 1993, bis gezeigt werden konnte, dass Würste immer optimal sind, falls die Dimension genügend groß ist. Betke et al. /6/ verifizierten die Wurstvermutung für Dimensionen $\geq 13\,387$, mittlerweile ist man bei der Dimension 42 angelangt /7/. Warum sich solche Aussagen in hohen Dimensionen „einfacher" beweisen lassen, liegt an einem mathematischen Phänomen, welches unter den Namen „concentration of measure on the sphere" bekannt ist. Vereinfacht dargestellt, beschreibt es den folgenden überraschenden Sachverhalt: Schneidet man die Kugel B^n mit einem zum Nullpunkt symmetrischen Streifen der Breite $6/\sqrt{n}$, dann enthält der Schnitt noch ca. 96 % des Volumens der Kugel (falls n hinreichend groß ist).

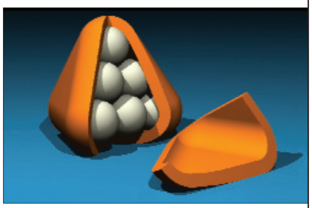


Abbildung 10
Parametrische Packung von vier Kugeln für $\rho = 1{,}3$

KRISTALLE UND MICROCLUSTER

Obwohl die Wurstvermutung ein sicherlich attraktives mathematisches Problem ist, so ist sie doch auf den ersten Blick eher eine mathematische Kuriosität. Insbesondere scheint es keinen Zusammenhang zwischen der endlichen Packungstheorie und der klassischen unendlichen Packungstheorie zu geben, d. h. optimale unendliche Packungen ergeben sich nicht als Grenzwert von optimalen endlichen Packungen. Von Betke et al. /6/ wurde eine verallgemeinerte Theorie entwickelt, die die endlichen und unendlichen Packungstheorien vereint. In Abhängigkeit von einem Parameter ρ wird eine so genannte parametrische Dichte für finite Packungen definiert. Durch diesen Parameter wird der Einfluss des Randes der konvexen Hülle einer endlichen Packung kontrolliert. Für Werte $\rho \geq 1$ kann man sich das parametrische Packungsproblem nun so vorstellen, dass man um die Kugeln einen „konvexen Mantel" mit einer Dicke $\rho - 1$ legt und wieder eine Konfiguration sucht, so dass das Volumen des von diesem Mantel eingeschlossenen Bereiches minimal wird. (Abbildung 10)

Für Anwendungen dieses parametrischen Problems bei der Industrieanfertigung von isolierten mehradrigen Kabeln verweisen wir auf /8/. Es stellt sich nun heraus /6/, dass für große Parameter ρ, d. h. $\rho \geq 2$, optimale endliche parametrische Packungen mit wachsender Anzahl von Kugeln gegen optimale unendliche Packungen „konvergieren". Umgekehrt sind für kleine Werte von ρ, d. h. $\rho < \sqrt{2}$, Würste optimale Konfigurationen, falls die Dimension groß genug ist. Die Lösung der Wurstvermutung in hohen Dimensionen ist eine unmittelbare Konsequenz dieser Untersuchungen.

Für verschiedene Werte von ρ kann man sich nun auch fragen, wie sieht die asymptotische Gestalt, d. h. für sehr viele Kugeln, einer optimalen Lösung aus. Diese Fragestellung führt zu einer überraschenden Verbindung zu der Gestalt von Kristallen. Obwohl Kepler sich bereits in seinem anfangs erwähnten Büchlein Gedanken über die Form von Schneekristallen gemacht hat, ist eine systematische Theorie der Gestalt der Kristalle erst im 19ten Jahrhundert entwickelt worden. Ausgehend von allgemeinen energetischen Gesetzen entwickelte sich eine Theorie, deren wichtigster Bestandteil das Gibbs-Curie'sche energetische Minimum-Prinzip (1875/90) darstellt. Danach nehmen ideale Kristalle eine Gestalt an, die nach dem deutsch-russischen Kristallographen Georg Wulff als „Wulff-shapes" bezeichnet werden. Sie scheinen ein ausgezeichnetes Modell für Kristalle zu sein. Interessanterweise liefert das parametrische Packungsproblem ebenfalls „Wulff-shapes" als asymptotische Gestalt optimaler Lösungen.

Die Abbildung 11 links zeigt Pyrit (Schwefelkies) und das entsprechende „Wulff-shape", erzielt

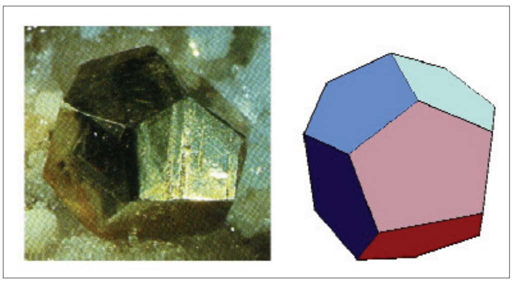


Abbildung 11
Pyrit

mittels der parametrischen Dichte /9/. Wie diese Zusammenhänge zwischen minimaler Energie im Sinne von Gibbs-Curie und minimalem Volumen der parametrischen konvexen Hülle zu erklären sind, ist ein noch offenes Problem.

Anstatt die asymptotische Gestalt von optimalen Packungen zu betrachten, kann man natürlich auch für eine kleine Anzahl von Kugeln und gegebenem Parameter nach der optimalen Anordnung fragen. Im Allgemeinen sind diese Probleme mathematisch nicht angreifbar, man kann aber versuchen, mit einem Computer nach möglichen optimalen Lösungen zu suchen. In Abbildung 12 sieht man die „wahrscheinlich optimalen“ Anordnungen für vier bis zwölf Kugeln /10/.

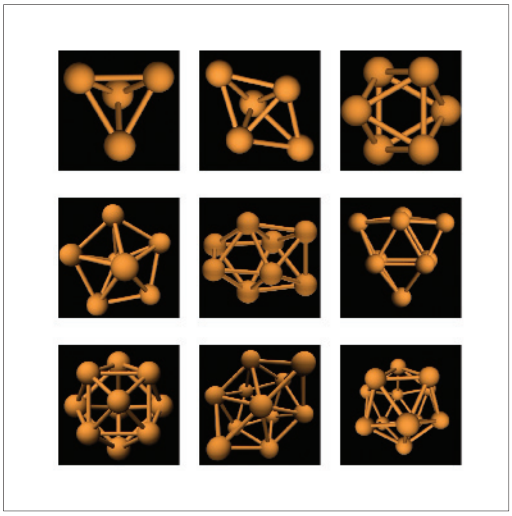


Abbildung 12
Mögliche optimale parametrische Packungen

Zur besseren Sichtbarkeit wird durch die Verbindungsstäbe angedeutet, welche Kugeln sich berühren. Erstaunlicherweise findet man fast ähnlich aussehende Konfigurationen auf der Titelseite der Ausgabe von Science im Juli 2003 /11/. Allerdings entstammen diese Anordnungen einem physikalisch-chemischen Experiment zur Untersuchung von Microclustern. Dabei werden zunächst Mikrokügelchen eines gewöhnlichen Kunststoffes in kleine Töpfchen von öligem Methylbenzol eingetaucht. Anschließend werden sie erhitzt bis die Tröpfchen verdunstet sind. Dadurch entstehen kleine Cluster von Mikrokügelchen, die dann mittels einer Zentrifuge getrennt und entsprechend der Anzahl der Kügelchen sortiert werden. Dabei haben sich für die gleiche Anzahl von Kügelchen signifikant oft die gleichen Konfiguration ergeben, nämlich diejenigen, die auch in der Abbildung 12 dargestellt sind. In dem erwähnten Science-Artikel werden verschiedene physikalisch-mathematische Modelle (Leonard-Jones Potential, „second moment“-Minimierung) zur Erklärung dieser Anordnungen beschrieben, jedoch erzielt die parametrische Dichte die größte Übereinstimmung mit den bisher durchgeführten Experimenten. Warum dies so ist, wird zur Zeit untersucht.

Prof. Dr. Martin Henk

Seine mathematische Grundausbildung erhielt Martin Henk an der Universität-Gesamthochschule Siegen, an der er Ende 1988 sein Studium der Mathematik beendete, anschließend promovierte und auch habilitierte. Er arbeitete in der Arbeitsgruppe „Methoden der kombinatorischen Geometrie“ an der TU Berlin mit. Dort beschäftigte er sich vor allem mit dem Einsatz von topologischen und algebraischen Methoden zur Lösung von Fragestellungen aus dem Bereich der diskreten Konvex-Geometrie, seinem Kernarbeitsgebiet. Im Vordergrund seiner mathematischen Untersuchungen steht das Studium des Zusammenspiels von diskreten und kontinuierlichen Größen. Diese Probleme sind unmittelbar verbunden mit klassischen Problemen aus der Geometrie der Zahlen, der Zahlentheorie, der Konvexgeometrie, der torischen Geometrie, der ganzzahligen Optimierung, des Kristallwachstums, der molekulardynamischen Simulationen und Fragestellungen in den Materialwissenschaften. Später wechselte Martin Henk an das Konrad-Zuse-Zentrum für Informationstechnik in Berlin, übernahm Gastprofessuren an der Universität Kreta sowie der TU Berlin und war außerordentlicher Professor an der TU Wien. Im Jahre 2002 erhielt er den Edmund und Rosa Hlawka-Preis der Österreichischen Akademie der Wissenschaften für seine Arbeiten. Im März 2003 folgte er dem Ruf auf die Professur Geometrie an die Magdeburger Universität.

Literaturhinweise

/1/ Kepler, J., Vom sechseckigen Schnee, Strena, Frankfurt Main, 1611, Faksimilie-Verlag Bremen, 1982

/2/ Hsiang, W.-Y., On the sphere packing problem and the proof of Kepler's conjecture, International J. Math., 93, (1993), 739-831

/3/ Hales, T. C., The status of the Kepler conjecture, Math. Intelligencer 16, no. 3, (1994), 47-58

/4/ Hsiang, W.-Y., A rejoinder to T.C. Hales'article „The status of the Kepler conjecture“, Math. Intelligencer 17, no.1, (1995), 35-42

/5/ Hsiang, W.-Y., Least action principle of crystal formation of dense packing type and Kepler's conjecture, Nankai Tracts in Mathematics, 3, Word Scientific, 2001

/6/ Betke, U., Henk, M., Wills, J. M., Finie and infinite packings, J. Reine Angew. Math., 453 (1994), 165-191

/7/ Betke, U., Henk. M., Finite Packings of Spheres, Discrete Comput. Geom., 19, (1998), 197-227

/8/ Schürmann, A., Plane finite Packings, Shaker Verlag 2000

/9/ Homepage von Prof. Dr. Uwe Schnell: www.math.uni-siegen.de/wills/schnell/g_pyr.jpg

/10/ Scholl, P., Schürmann, A., Wills, J. M., A discrete isoperimetric inequality and its application to sphere packings, in Discrete and Computational Geometry – The Goodman-Pollack Festschrift, Springer, 2003

/11/ Manoharan, V. N., Elsesser, M. T., Pine, D. J., Dense packings and symmetry in small clusters of microspheres, Science, vol 301, (2003), 483-487